Научное общество учащихся «Эврика»

Городская конференция «Первые шаги в науку»

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Школа №97»

Ленинского района

Г. Нижнего Новгорода

«Простые числа Мерсенна»

Выполнил: Мошнин Юрий

ученик 6 Б класса

Научный руководитель:

Камерина Е.Б.

учитель математики

Н. Новгород

2024

Оглавление

Введение

Интерес к изучению простых чисел возник у людей с давних времен. Простые числа представляют собой одно из самых интересных математических явлений, которое привлекает к себе внимание ученых на протяжении уже более двух тысячелетий. Поиск простых чисел — по крайней мере больших простых чисел — довольно сложная задача, потому что еще никому не удалось найти формулу или алгоритм, позволяющий их сгенерировать.

Впервые я познакомился с простыми числами на уроке математики в 5 классе, когда мы изучали тему «Простые числа». Учитель объяснил нам, что такое простые и составные числа, представил нашему вниманию таблицу простых чисел до 997, которую мы использовали для выполнения заданий и упражнений (Приложение 1). Чем больше я узнавал о простых числах, тем больше вопросов у меня возникало:

Сколько всего простых чисел?

Есть ли формула нахождения простых чисел?

Существует ли конечное простое число?

Я решил узнать о простых числах подробнее.

Цель проекта – изучить как осуществляется поиск простых чисел Мерсенна.

Для этого необходимо решить следующие задачи:

1. Выяснить что такое простые числа и историю их происхождения;
2. Узнать кто придумал простые числа;
3. Изучить применение чисел Мерсенна на практике.
4. Вычислить числа Мерсенна самостоятельно.

Объектом изучения являются простые числа, а предметом способы их нахождения.

Чтобы выяснить, что такое числа Мерсенна, выдвину гипотезу: число Мерсенна это простое число, которое на единицу меньше степени двойки. То есть это простое число вида $M_p = 2^p - 1$, где p – простое число.

Простые числа несут в себе много тайн. Изучив дополнительную литературу, я понял, что простые числа не такие уж и простые.

Простые числа

Никто точно не знает, когда человечество стало интересоваться простыми числами. Ранних источников, связанных с исследованиями этого математического явления, практически не сохранилось. Скорее всего, древние люди имели какое-то представление о простых числах. Первым реальным доказательством являются египетские записи на папирусах, сделанные более 3500 лет назад (Приложение 2).

Итак, начнем с целых чисел – это 1, 2, 3, 4, 5, 6 и так далее до бесконечности. Целых чисел у нас бесконечно много, потому что если бы их было конечное количество, то мы взяли последнее число и прибавили к нему единицу, в результате чего мы бы получили ещё одно число. Вот несколько таких чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т.д. Простых чисел, как доказал ещё Евклид (древнегреческий математик, III в. до н.э.), бесконечное множество и самое большое найти просто нельзя. Предположим, что существует некое наибольшее простое число, тогда мы перемножим все простые числа и прибавим к произведению единичку. Получившееся число ни на одно из наших простых чисел делиться не будет, значит, оно делится на какое-то новое простое число. Такое рассуждение от противного показывает, что простых чисел бесконечно много и самого большого простого числа просто не существует.

Рассмотрев числовой ряд простых чисел, я обратил внимание, что единица уникальная по свойствам число, она имеет только один делитель: само это число. Поэтому его не относят ни к составным, ни к простым числам.

В III веке до н.э. греческий ученый Эратосфен Киренский, хранитель знаменитой Александрийской библиотеки, придумал довольно легкий способ поиска простых чисел. Он записал все числа от 1 до какого-то числа порядку, потом вычеркнул 1, которая не является ни простым, ни составным числом, а потом начинал вычеркивать все числа, идущие после двойки, кратные 2 (4, 6, 8 и т.д). Далее вычеркивал все числа, идущие после 3, кратные 3 (6, 9, 12 и т.д.), после 5, кратные 5 (10, 15, 20, 25 и т.д.). В результате получался список цифр, которые ни на что не делятся, кроме себя и единицы. Так как греки делали записи на покрытых воском табличках или папирусе, а числа не вычеркивались, а выкалывались иглой, то таблица в конце вычислений напоминала решето. Поэтому данный метод поиска простых чисел называют «Решетом Эратосфена»: в этом решете отсеиваются простые числа от составных.

Я попробовал отсеять простые числа от составных от 1000 до 1100 (Приложение 3). Общее количество простых чисел получилось 13 штук.

Затем я решил исследовать закономерность в расположении простых чисел в натуральном ряду от 2 до 1000. Для этого я посчитал количество простых чисел до 1 000 вручную. Общее количество простых чисел получилось 168 штук.

Простые числа от 1 до 100: **25 чисел**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,71, 73, 79, 83, 89, 97

Простые числа от 101 до 200: **21 число**

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

Простые числа от 201 до 300: **16 чисел**

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293

Простые числа от 301 до 400: **16 чисел**

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397

Простые числа от 401 до 500: **17 чисел**

401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499

Простые числа от 501 до 600: **14 чисел**

503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599

Простые числа от 601 до 700: **16 чисел**

601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691

Простые числа от 700 до 800: **14 чисел**

701,709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797

Простые числа от 800 до 900: **15 чисел**

809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887

Простые числа от 900 до 1000: **14 чисел**

907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

Я пришел к выводу, что количество простых чисел по мере увеличения разряда числа реже встречаются в числовом ряду.

Одной из занимательных задач в теории чисел самая увлекательная – это поиск простых чисел. Подобно золотым самородкам, они скрываются в множестве остальных чисел.

Простые числа Мерсенна

Среди простых чисел особую роль играют простые числа Мерсенна. Эти числа имеют вид

$M_p = 2^p - 1$, где p — простое число.

Они называются простыми числами Мерсенна по имени французского монаха, философа, математика Марена Мерсенна (1588-1648), одного из основателей Парижской Академии наук.

Родился Мерсенн в крестьянской семье, в посёлке Уазе. Учился в иезуитском коллеже в Ла-Флеш, вместе с Декартом, тесную дружбу с которым Мерсенн пронёс через всю жизнь. Далее он продолжил обучение в Париже. В 1613 году был рукоположен в священники, но не прекратил обучения, занявшись математикой, музыкой и философией. Совершил несколько путешествий по Европе, побывал в Италии, Германии, Голландии и других странах. Во время поездок приобретал новые знакомства, завязывал переписку, слушал лекции в местных университетах. Затем Мерсенн вернулся в Париж, поселился в монастыре и последующие десятилетия отдал науке и преподаванию философии. В течение его продолжительного пребывания в Париже у него еженедельно происходили собрания математиков и физиков, с целью взаимного обмена идеями и мыслями, а также информирования о результатах предпринятых исследований (четверги Мерсенна). Позднее из этого кружка образовалась Парижская Академия наук (1666).

Как и многие математики той эпохи, он всю жизнь занимался поиском совершенных чисел, то есть таких чисел, которые представляют собой сумму всех своих делителей (самым маленьким совершенным числом является число 6=2+3+1). Однако однажды Мерсенн заинтересовался числами другого вида. Это были степени двойки, уменьшенные на единицу. Например,

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$ – простое;

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$ – простое;

$M_4 = 2^4 - 1 = 15 = 3 * 5$ – составное;

$M_5 = 2^5 - 1 = 31$ – простое;

Первые три числа, полученные по этой формуле, оказались простыми, но уже четвертое ($2^4=15$) было составным. Мерсенну стало любопытно, как распределяются простые и составные числа в этой последовательности.

В 1648 году Мерсенн выпустил загадочный труд Cogitata Physica-Mathematica. В этой работе он высказал предположение, что двойка в степенях 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257, уменьшенная на единицу, обязательно даст в результате простое число. Все остальные числа, рассчитанные по этой формуле, будут составными. С тех пор числа, на единицу меньше степени двойки, называются числами Мерсенна, а поиск простых чисел стал популярным развлечением среди математиков.

Эти числа представляют интерес, так как некоторые из них являются простыми при больших значениях p.

Я попробовал найти несколько первых чисел Мерсенна, используя данную формулу, я записал их по порядку в таблицу из четырех столбцов.

Таблица №1

M1	1	M2	3	M3	7	M4	15
M5	31	M6	63	M7	127	M8	255
M9	511	M10	1 023	M11	2 047	M12	4 095
M13	8 191	M14	16 383	M15	32 767	M16	65 535
M17	131 071	M18	262 143	M19	524 287	M20	1 048 575
M21	2 997 151	M22	4 194 303	M23	8 388 607	M24	16 777 215
M25	33 554 431	M26	67 108 863	M27	134 217 727	M28	268 435 455
M29	536 870 911	M30	1 073 741 823	M31	2 147 483 647	M32	4 294 967 295

Вычислив первые числа Мерсенна, я заметил:

1. Числа чередуются по последней цифре (первые четыре числа заканчиваются на цифры 1, 3, 7, 5, последующие четыре опять повторяются и т.д.).

2. Числа во втором столбце делятся на 3, значит они составные, и среди них не может быть простых чисел Мерсенна. Числа в четвертом столбце делятся на 5, соответственно среди них тоже не может быть простых чисел.

Следовательно, простые числа Мерсенна (за исключение $M_2=3$) имеет смысл искать только в первом и третьем столбце. Но среди чисел 1 и 3 столбца, есть составные, например: $M_9=511=7*73$, $M_{11}=2047=23*89$, $M_{15}=32767=7*31*151$.

Поэтому вопрос сужения диапазона поиска простых чисел Мерсенна является актуальным.

3. Более пристальное изучение чисел M_p приводит к наблюдению, что число 2^p-1 будет простым только при условии, что p – простое.

Всего на декабрь 2022 года известно 51 простое число Мерсенна, при этом порядковые номера достоверно установлены только у первых 48 чисел. В частности, неизвестно, существуют ли другие простые числа Мерсенна, меньшие известного рекордного.

.

Поиск простых чисел Мерсенна

Общий способ нахождения больших простых чисел Мерсенна состоит в проверке всех чисел M_p для различных простых чисел p. Эти числа очень быстро увеличиваются и столь же быстро увеличиваются затраты труда на их нахождение. То, что с этой работой все-таки можно справиться уже для довольно больших чисел, объясняется существованием эффективных способов выяснения простоты для чисел такого вида.

В исследовании чисел Мерсенна можно выделить раннюю стадию, достигшую своей кульминации в 1772 году, когда Леонард Эйлер установил, что число M_{31} является простым. К этому времени было найдено восемь простых чисел Мерсенна, соответствующих значениям

$p = 2, p = 3, p = 5, p = 7, p = 13, p = 17, p = 19, p = 31$.

Эйлерово число M_{31} оставалось самым большим из известных простых чисел более ста лет. В 1876 году французский математик Лукас установил, что огромное число

$M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$ является простым числом, в котором 39 цифр.

В 1883 году русский математик Иван Первушин доказал простоту числа Мерсенна для показателя $p = 61$.

Еще два ($p = 89$ и $p = 107$) были обнаружены в начале 20 века Рафаэлем Пауэрсом в 1911 и 1914 годах соответственно.

Эти 12 простых чисел Мерсенна были вычислены с помощью только карандаша и бумаги, а для вычисления следующих уже использовались механические настольные счетные машины. Появление вычислительных машин с электрическим приводом позволило продолжить поиски, доведя их до $p = 257$. Однако результаты были неутешительными, среди них не оказалось новых простых чисел Мерсенна.

Затем задача была переложена на плечи ЭВМ. Создание все более высокопроизводительных ЭВМ дало возможность продолжить поиск новых простых чисел Мерсенна. Рафаэль Робинсон в 1952 году на базе лампового компьютера установил, что значения

$p = 521, p = 607, p = 1279, p = 2203, p = 2281$

дают простые числа Мерсенна. Дальнейшие поиски также увенчались успехом.

Ризель (1958) показал, что $p = 3217$, дает простое число Мерсенна, а Александр Гурвиц (1962) нашёл еще два таких значения: $p = 4253, p = 4423$ в результате проведения 50-минутного теста на современном одноядерном ноутбуке IBM 7090.

Огромного успеха добился Дональд Гиллельс (1964), который нашел простые числа Мерсенна, соответствующие значениям

$p = 9689, p = 9941, p = 11213$, запустив компьютер на всю весну 1963 года.

На тот момент это было на столь великим достижением, что Пол Бейтман, который руководил кафедрой теории чисел в Университете Иллинойса, заказал специальную печать для корреспонденции, на которой , помимо даты, красовалась надпись «2^{11213}-1 – простое число».

В 1970-х годах интерес к числам Мерсенна снова активизировался. Причиной тому стала история двух тогда еще американских школьников — Лауры Никел и Лэндона Нолла. Не особо разбираясь в математических тонкостях вопроса, они написали программу для проверки чисел Мерсенна на простоту и прогнали ее на суперкомпьютере в местном университете. В результате они смогли найти 25-е и 26-е простые числа Мерсенна с показателями 21 701 и 23 209 соответственно. Это были самые большие простые числа из известных на тот момент. История с открытием школьников попала на телеэкраны, и поиск простых чисел Мерсенна снова вернулся в моду.

К концу XX века стало понятно, что индивидуальный поиск зашел в тупик - слишком высока стала размерность чисел, слишком велики расстояния между соседними достижениями. В январе 1996 года Джорджем

Уолтманом была сформирована Организация Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) для нахождения новых мировых рекордов простых чисел Мерсенна. В 1997 году Скотт Куровски обеспечил GIMPS возможность использовать мощь тысяч обычных компьютеров для поиска этих «иголок в стоге сена». Большинство участников GIMPS вступило в организацию ради захватывающей возможности обнаружения рекордного, редкого и исторического нового простого числа Мерсенна. Любой человек с достаточно мощным компьютером может присоединиться к GIMPS и стать охотником за большими простыми числами с возможностью получить денежную награду за своё открытие.

Результат не заставил себя ждать - все последующие рекорды были установлены именно в рамках GIMPS. Теперь каждый открыватель нового простого числа Мерсенна получает приз $3,000. Но тот участник, кому посчастливится найти первое стомиллионзнаковое или миллиардзнаковое простое число, получит несравненно больше - $15,000.

Живой легендой последнего десятилетия является Кертис Купер - профессор Университета Центрального Миссури. Его парк компьютерной техники, задействованной в проекте, насчитывает более 19,000 ПК. Неудивительно, что он четырежды становился номинантом награды.

В 2018 году к проекту присоединился участник - британский миллиардер Бен Дело, владелец биржи криптовалют BitMEX. Мощность GIMPS фактические удвоилась, и скорость первичной проверки экспонент обогнала все прогнозы! В связи с этим мир ждет новых результатов.

Общее количество простых чисел Мерсенна на сегодняшний день составляет 51 (Приложение 4). В новом самом большом простом числе показатель p равен 82 589 933, а десятичная запись числа $2^{82589933}-1$ имеет 24 862 048 символов: это всего на 400 тысяч знаков меньше, чем длина десяти романов «Война и мир» без пробелов. На проверку обнаруженного числа у Ляроша ушло 12 дней: для этого он использовал компьютер с процессором Intel i5-4590T.

Практическая значимость простых чисел

Зачем вообще математики занимаются простыми числами?

У простых чисел существует огромное количество применений как в области математики, так за ее пределами. Простые числа в наши дни используются практически ежедневно, хотя чаще всего люди об этом не подозревают.

Большие простые числа нужны для криптографии (наука о шифрах и способах сохранения конфиденциальной информации). Потому что в математике бывают операции, которые в одну сторону легкие, а в другую — трудные. И к таким операциям относится умножение простых чисел. К примеру, если мы возьмем два простых числа P и Q, перемножим их друг на друга, то результат узнаем довольно быстро. Но если возьмем большое целое число и попробуем найти множители, то понять, какие именно простые числа мы перемножали, мы не сможете.

Электронная почта, банковские операции, кредитные карты и мобильная телефонная связь — все это защищено секретными кодами, непосредственно основанными на свойствах простых чисел.

Идея состоит в том, что каждый пользователь имеет пару ключей: открытый и закрытый. Если мы хотим отправить кому-то сообщение, мы зашифровываем это сообщение с помощью открытого ключа — то есть ключа, известного всем. Но только человек, имеющий соответствующий закрытый ключ, может расшифровать это сообщение. Одним из преимуществ такого метода является то, что закрытый ключ никогда не передается и поэтому его не нужно постоянно менять в целях безопасности. Идея метода не совсем проста, но мы можем пояснить ее с помощью аналогии. Представьте себе большой магазин, где продаются сотни тысяч банок с краской разного цвета. Возьмем две любые банки и смешаем краску в разных количествах. Пока все просто. Теперь, если мы покажем кому-нибудь получившийся цвет и попросим «расшифровать», какое количество каких красок использовалось изначально, на такой вопрос будет очень трудно ответить.

Именно так работают односторонние функции с потайным входом, которые легко применить в одном направлении, но практически невозможно — в обратном.

Предположим теперь, что вместо банок с краской в магазине находятся простые числа. Возьмем любые два, например, 7 и 13, и перемножим их (аналогично смешиванию краски). В результате мы получим 7 x 13 = 91.

Тогда возникает вопрос: можно ли узнать, какие простые числа были перемножены, чтобы в результате получилось 91? Для ответа на него надо взять список простых чисел и проделать несколько проверок. Казалось бы, простое решение, как и в случае определения цвета красок, если в магазине было всего около десятка основных цветов.

Но с простыми числами все намного сложнее.

Например, ни у кого не хватит терпения проверить, что число 1 409 305 684 859 является результатом умножения простых чисел 705 967 и 1996 277, особенно если учесть, что эти два простых числа взяты из списка простых чисел между 1 и 2 000 000, а там таких «всего лишь» 148 933. Однако мы живем в эпоху высоких технологий, и, конечно, эту задачу можно довольно быстро решить с помощью хорошей программы и мощного компьютера.

Пара простых чисел в приведенном выше примере содержит лишь несколько цифр. Если мы возьмем простые числа, каждое из которых содержит сотни цифр, то время, которое потребуется компьютерной программе на простой перебор всех возможных вариантов будет больше, чем предполагаемое время существования Земли.

Поэтому постоянно существует потребность в новых простых числах (чем больше, тем лучше) для генерации секретных кодов. Таким образом, имеется спрос на простые числа.

Заключение

Природа простых чисел очень интересная и увлекательная тема.

Я собрал, изучил и проанализировал материалы по теме и установил, что определение простых чисел только на первый взгляд кажется легким занятием. В натуральном ряду простые числа разбросаны очень непредсказуемым образом. Многие математики и ученые искали формулу, которая позволила бы выделить простые числа из бесконечного множества натуральных чисел, но только французский монах Марен Мерсенн создал теорию по нахождению простых чисел.

Моя гипотеза подтвердилась, простые числа Мерсенна имеют вид $M_p = 2^p - 1$, где p-простое число.

На основании проделанной мною работы я сделал следующие выводы:

1. Изучив дополнительную литературу и источники в интернете, я узнал много интересного и расширил свой кругозор по теме простые числа, числа Мерсенна, понял как они вычисляются.

2. Исследовал закономерность в нахождении простых чисел Мерсенна, изучил последовательность нахождения простых чисел «Решето Эратосфена».

3. Для простых чисел не существует формулы, по которой их можно вычислить.

4. Не существует самого большого простого числа, последовательность простых чисел бесконечна.

В наше время нахождение простых чисел носит актуальных характер. Практическая значимость больших простых чисел лежит в основе современной криптографии. Простые числа оказались не такими и простые, какими казались изначально.

Список литературы:

1. Виноградов И.Н. Математическая энциклопедия.- М.: Советская энциклопедия, 1977

2. Грасиан Энрике. Мир математики. т.3. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности, Издательство «Де Агостини», М., 2014 год.

3. Журнал "Огонёк" №11 от 25.03.2013, стр. 34

4. Мамедов О.М. Числа Мерсенна. //Журнал «Квант» №10, 1986г.

5. https://math.wikireading.ru

6. http://mersenne.org/primes/

7. https://postnauka.ru/longreads/155310

8. Интернет ресурсы

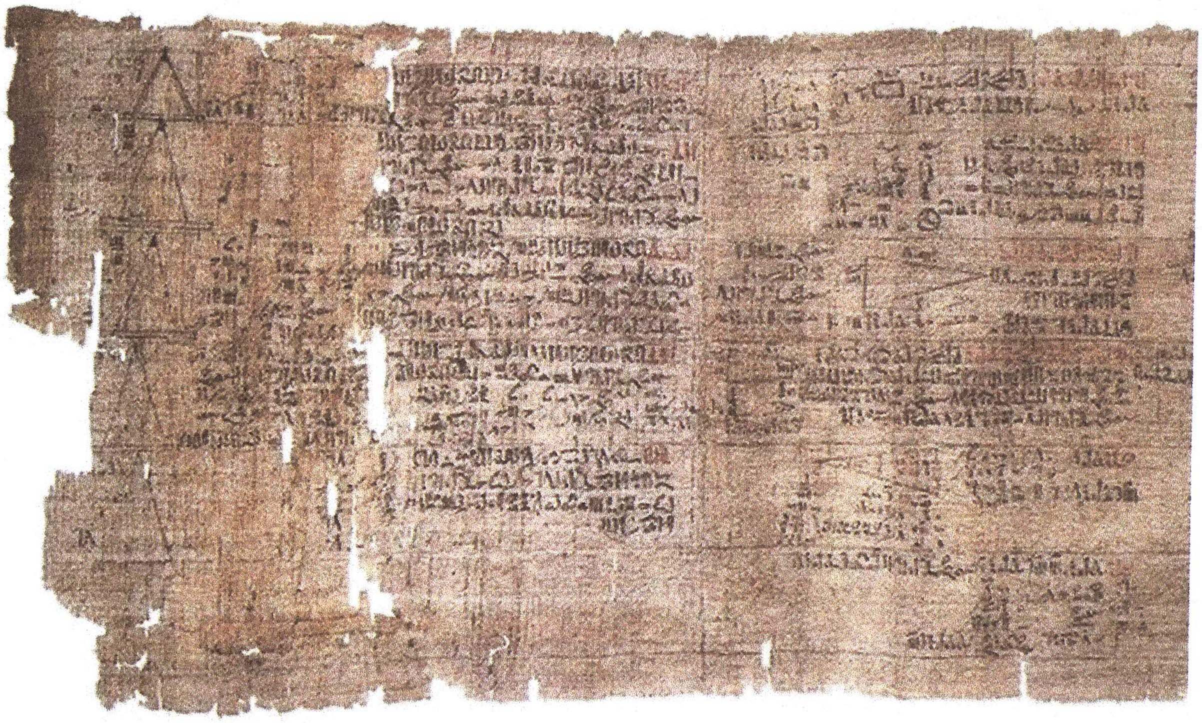
Приложение

Приложение 1

Таблица простых чисел до 997.

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	963
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Приложение 2



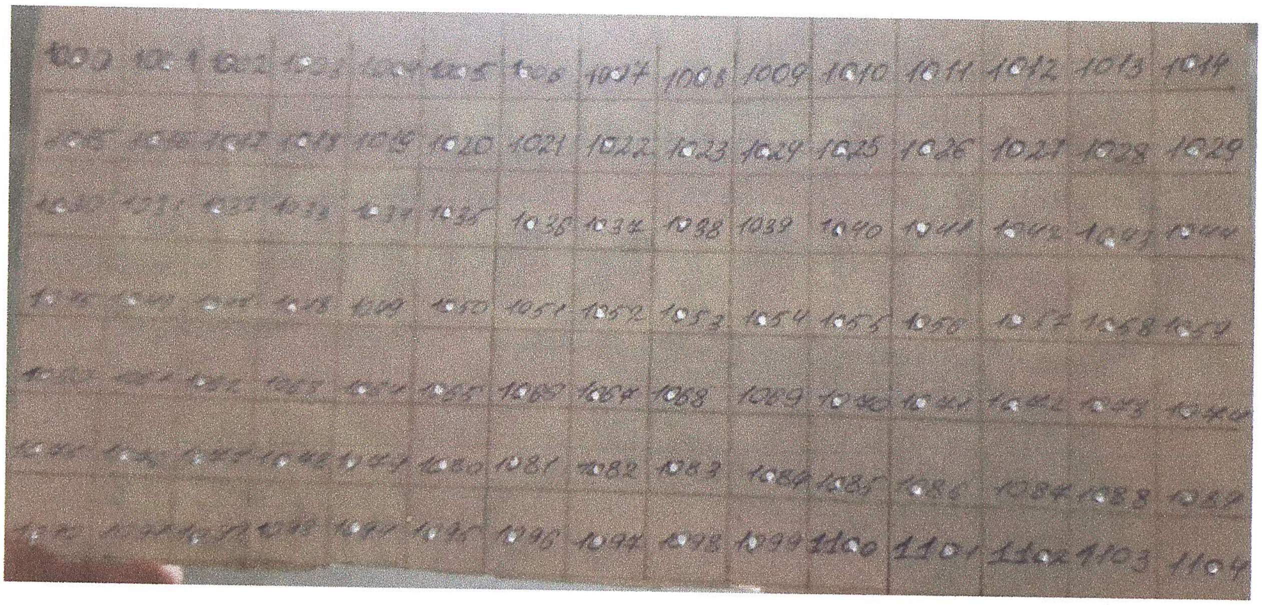
	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~

= divisible by 2

= divisible by 3

= divisible by 5

= divisible by 7



Приложение 4

Таблица рекордов

Номер	Число	Размерность	Дата	Открыватель	Алгоритм и компьютер
Числа посчитанные вручную					
1	$2^{2}-1$	1 цифра	~500 до н.э.	Древнегреческие математики	
2	$2^{3}-1$	1	~500 до н.э.	Древнегреческие математики	
3	$2^{5}-1$	2	~275 до н.э.	Древнегреческие математики	
4	$2^{7}-1$	3	~275 до н.э.	Древнегреческие математики	
5	$2^{13}-1$	4	1456	Неизвестно	Простое деление
6	$2^{17}-1$	6	1588	Пьетро Катальди	Простое деление
7	$2^{19}-1$	6	1588		Простое деление
8	$2^{31}-1$	10	1772	Леонард Эйлер	Улучшенное простое деление
9	$2^{61}-1$	19	1883	Иван Михеевич Первушин	Последовательность Люка
10	$2^{89}-1$	27	1911.06	Ральф Эрнест Пауэрс	Последовательность Люка
11	$2^{107}-1$	33	1914.06.11		Последовательность Люка
12	$2^{127}-1$	39	1876.01.10	Франсуа Эдуард Анатоль Лукас	Последовательность Люка
Компьютерная Эра:					
13	$2^{521}-1$	157	1952.01.30	Рафаэль М. Робинсон	LL / SWAC
14	$2^{607}-1$	183	1952.01.30		LL / SWAC
15	$2^{1,279}-1$	386	1952.06.25		LL / SWAC
16	$2^{2,203}-1$	664	1952.10.07		LL / SWAC
17	$2^{2,281}-1$	687	1952.10.09		LL / SWAC
18	$2^{3,217}-1$	969	1957.09.08	Ханс Ризель	LL / BESK
19	$2^{4,253}-1$	1,281	1961.11.03	Александр Гурвиц	LL / IBM 7090
20	$2^{4,423}-1$	1,332	1961.11.03		LL / IBM 7090
21	$2^{9,689}-1$	2,917	1963.05.11	Дональд Гиллис	LL / ILLIAC II
22	$2^{9,941}-1$	2,993	1963.05.16		LL / ILLIAC II
23	$2^{11,213}-1$	3,376	1963.06.02		LL / ILLIAC II
24	$2^{19,937}-1$	6,002	1971.03.04	Брайант Такерман	LL / IBM 360/91
25	$2^{21,701}-1$	6,533	1978.10.30	Лэндон Курт Нолл и Лора Никель	LL / CDC Cyber 174
26	$2^{23,209}-1$	6,987	1979.02.09	Лэндон Курт Нолл	LL / CDC Cyber 174
27	$2^{44,497}-1$	13,395	1979.04.08	Гарри Л. Нельсон & Дэвид Слоуински	LL / Cray 1
28	$2^{86,243}-1$	25,962	1982.09.25	Дэвид Слоуински	LL / Cray 1
29	$2^{110,503}-1$	33,265	1988.01.28	Уолтер Колкитт и	LL / NEC SX-2

				Люк Уэлш	
30	$2^{132,049}$ -1	39,751	1983.09.19	Дэвид Слоуински и др.	LL / Cray X-MP
31	$2^{216,091}$ -1	65,050	1985.09.01		LL / Cray X-MP/24
32	$2^{756,839}$ -1	227,832	1992.02.19		LL / Maple - Harwell Lab Cray-2
33	$2^{859,433}$ -1	258,716	1994.01.04		LL / Cray C90
34	$2^{1,257,787}$ -1	378,632	1996.09.03		LL / Cray T94
Эра GIMPS:					
35	$2^{1,398,269}$ -1	420,921	1996.11.13	GIMPS / Джоэл Арменго	LL / Prime95 - 90 MHz Pentium PC
36	$2^{2,976,221}$ -1	895,932	1997.08.24	GIMPS / Гордон Спенс	LL / Prime95 - 100 MHz Pentium PC
37	$2^{3,021,377}$ -1	909,526	1998.01.27	GIMPS / Роланд Кларксон	LL / Prime95 - 200 MHz Pentium PC
38	$2^{6,972,593}$ -1	2,098,960	1999.06.01	GIMPS / Наян Хаджратвала	LL / Prime95 - 350 MHz Pentium II IBM Aptiva
39	$2^{13,466,917}$ -1	4,053,946	2001.11.14	GIMPS / Майкл Кэмерон	LL / Prime95 - 800 MHz Athlon Thunderbird
40	$2^{20,996,011}$ -1	6,320,430	2003.11.17	GIMPS / Майкл Шейфер	LL / Prime95 - 2 GHz Dell Dimension
41	$2^{24,036,583}$ -1	7,235,733	2004.05.15	GIMPS / Джош Финдли	LL / Prime95 - 2.4 GHz Pentium 4 PC
42	$2^{25,964,951}$ -1	7,816,230	2005.02.18	GIMPS / Мартин Новак	LL / Prime95 - 2.4 GHz Pentium 4 PC
43	$2^{30,402,457}$ -1	9,152,052	2005.12.15	GIMPS / Кертис Купер и Стивен Бун	LL / Prime95 - 2 GHz Pentium 4 PC
44	$2^{32,582,657}$ -1	9,808,358	2006.09.04	GIMPS / Кертис Купер и Стивен Бун	LL / Prime95 - 3 GHz Pentium 4 PC
45	$2^{37,156,667}$ -1	11,185,272	2008.09.06	GIMPS / Ханс-Михаэль Эльвених	LL / Prime95 - 2.83 GHz Core 2 Duo PC
46	$2^{42,643,801}$ -1	12,837,064	2009.04.12	GIMPS / Одд Магнар Стриндмо	LL / Prime95 - 3 GHz Core 2 PC
47	$2^{43,112,609}$ -1	12,978,189	2008.08.23	GIMPS / Эдсон Смит	LL / Prime95 - Dell Optiplex 745
48 ?	$2^{57,885,161}$ -1	17,425,170	2013.01.25	GIMPS / Кертис Купер	LL / Prime95 - Intel Core2 Duo E8400 @ 3.00GHz
49 ?	$2^{74,207,281}$ -1	22,338,618	2016.01.07	GIMPS / Кертис Купер	LL / Prime95 - Intel i7-4790 @ 3.60GHz
50 ?	$2^{77,232,917}$ -1	23,249,425	2017.12.26	GIMPS / Джонатан Пейс	LL / Prime95 - Intel i5-6600 @ 3.30GHz
51 ?	$2^{82,589,933}$ -1	24,862,048	2018.12.07	GIMPS / Патрик Ларош	LL / Prime95 - Intel i5-6600 @ 3.30GHz