Научное общество учащихся
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
Лицей №36

Чевианы треугольника

Выполнил: ученик 7 «Б» класса
Тагиров Артемий
Научный руководитель: учитель математики
МАОУ Лицей № 36
Лосева Лариса Николаевна
(консультант – Филатов Константин Владимирович)

Нижний Новгород
2024

Оглавление

Введение

В 7 классе мы приступили к изучению геометрии. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Геометрия — древняя наука, возникшая на основе практической деятельности людей, связанной с различными измерительными работами. Накопление знаний о геометрических измерениях и построениях сформировали геометрию как науку, занимающуюся изучением геометрических фигур.

Актуальность

Одной из самых важных для изучения геометрических фигур является треугольник. Изучение темы «Треугольники» начинается в геометрии для седьмых классов. В учебной литературе встречаются различные, непротиворечащие друг другу определения треугольника. Например: многоугольник с тремя вершинами и тремя сторонами называется треугольником, треугольник - геометрическая фигура, образованная тремя отрезками, которые соединяют три точки, не лежащие на одной прямой и другие.

Треугольник – самая простая замкнутая фигура, одна из первых геометрических фигур, свойства которой человек узнал еще в глубокой древности. Треугольник изучался в ионийской школе, основанной в VII в. до н. э. Фалесом, и в школе Пифагора. Изучение треугольника всегда имело широкое применение в практической жизни. Например, в строительстве используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей.

Различные виды и свойства треугольников мы будем изучать на протяжении всего курса геометрии. Так, уже в курсе геометрии 7 класса, изучаются такие виды треугольников как равнобедренные треугольники, прямоугольные треугольники, их признаки и свойства. При этом рассматриваются важнейшие для изучения свойств треугольников понятия, такие как биссектриса, медиана и высота, которые можно определить как отрезки в треугольнике, проведенные из вершин треугольника к противоположной стороне по определенному правилу. Отрезки, соединяющие вершину треугольника с точкой на противоположной стороне (или её продолжении) в геометрии называются чевианами. Чевианы треугольника и их свойства будут рассмотрены настоящей работе.

Объект исследования: треугольник как геометрическая фигура.

Предмет исследования: чевианы треугольника.

Гипотеза исследования: При доказательстве теорем о свойствах чевиан можно использовать различные подходы, использование теоремы Чевы делает доказательства свойств специальных чевиан более простыми и компактными по сравнению с классическими доказательствами, приведенными в учебной литературе.

Цель работы: изучить понятие «чевианы треугольника», их свойства, изучить теорему Чевы и ее применение.

Задачи:

- Рассмотреть происхождение понятия «чевиана»;
- Рассмотреть понятия и свойства биссектрисы, медианы и высоты треугольника и определить их как специальные случаи чевиан треугольника;
- Изучить теорему о «чевианах треугольника», рассмотреть случаи ее применения для доказательств свойств специальных чевиан и решения геометрических задач;
- Поделиться полученной в ходе исследования информацией с одноклассниками;

Работа была выполнена по плану:

- Изучение литературных и цифровых источников, содержащих
- информацию о чевианах треугольника;
- Определение актуальности работы;
- Сбор и анализ собранного материала;

- Определение цели и задач исследовательской работы;
- Формулирование гипотезы исследования;
- Проверка гипотезы, обобщение полученных результатов и формулирование выводов;
- Подготовка текста и презентации исследовательской работы.

Методы исследования: изучение литературы и обобщение полученной информации, анализ, уточнение сделанных выводов.

Результатом исследования является презентация, которая поможет ученикам 7-х классов познакомиться с понятием «чевианы треугольника», теоремой Чевы и ее применением.

В ходе выполнения работы были рассмотрены следующие литературные источники: С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. «Новые встречи с геометрией»; Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С. Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. «Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики», статьи с портала cyberleninka.ru, и другие источники.

Глава 1. Чевианы треугольника и специальные случаи чевиан

1.1 Происождение понятия «чевиана» и специальные чевианы треугольника

Название «чевиана» происходит от имени итальянского инженера Джованни Чевы, доказавшего известную теорему о чевианах, которая носит его имя.

Джованни Чева (1648-1734 г.)- итальянский инженер и математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих, изложенное в его исследовании «О взаимнопересекающихся прямых»(1678).

Что же такое чевиана?

Определение. Чевианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой противолежащей стороны, или ее продолжения.

В ходе изучения курса геометрии 7 класса мы познакомились несколькими отрезками треугольников и их удивительными свойствами. Рассмотрим некоторые из этих отрезков.

Биссектриса треугольника

Биссектрисой любого угла называется луч, исходящий из вершины этого угла и делящий его на два равных угла. Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны треугольника, называется биссектрисой. Любой треугольник имеет три биссектрисы.

Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника, называется медианой треугольника.

Поскольку треугольник имеет три вершины и три стороны, любой треугольник имеет три медианы.

Высота треугольника

Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника. Любой треугольник имеет три высоты.

Если сравнить определения медиан, биссектрис и высот треугольника с определением чевианы, как отрезка, соединяющего вершину треугольника с произвольной точкой противолежащей стороны или ее продолжения, можно сделать вывод о том, что и биссектриса и медиана и высота также являются чевианами и предложить следующие определения вышеназванных отрезков треугольника:

Биссектириса треугольника - чевиана треугольника, делящая его угол на два равных угла.

Медиана треугольника - чевиана, которая соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Высота треугольника - чевиана, перпендикулярная к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Таким образом, медианы, биссектрисы и высоты треугольника являются специальными случаями чевиан.

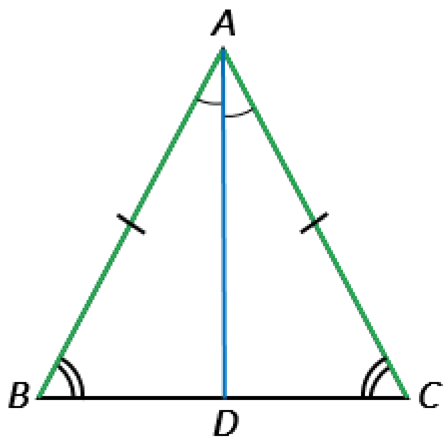
1.2 Теоремы о свойствах медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Что мы знаем о свойствах медианы, биссектрисы и высоты треугольника из школьного курса геометрии 7 класса ?

При изучении равнобедренного треугольника, т.е. треугольника, две (боковые) стороны которого равны, а неравная сторона называется основанием, мы изучали его замечательные свойства и установили, что биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию равнобедренного треугольника, совпадают. Рассмотрим теорему.

Теорема: В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство: ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.



Треугольники ABD и ACD равны (по СУС), т.к. биссектриса делит угол A на два равных угла, AB=AC, AD- общая сторона для этих двух треугольников. Следовательно, BD=DC. Это равенство означает, что точка D — середина стороны BC, и поэтому биссектриса AD — медиана треугольника ABC. Так как углы ADB и ADC — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. Ч и ТД.

Кроме того, справедливы утверждения:

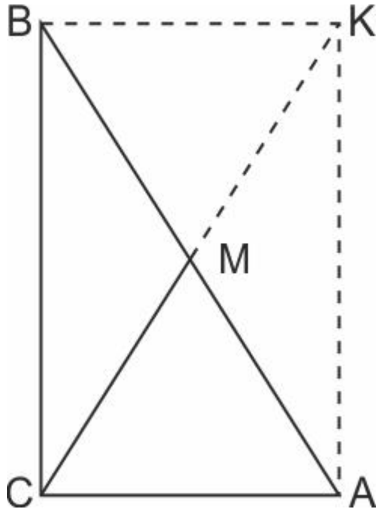
1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

При изучении некоторых свойств и признаков прямоугольных треугольников, мы выяснили, что медиана, проведённая из вершины угла к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

Теорема: Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Доказательство: Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC



Пусть CM - медиана прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Продлим CM за точку M и отметим на луче CM точку K так, что CM = MK. Треугольники BKM и ACM равны по углу и двум сторонам. Значит, углы BKM и ACM равны (накрест лежащие), тогда BK параллельна AC и BK = AC. AKBC- прямоугольник. Согласно теореме о свойствах прямоугольника, диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам (примем без доказательств). Таким образом, CM=AM=BM=1/2AB и медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. ЧТД.

Продолжая изучать специальные чевианы треугольника, обращаем внимание на некоторые замечательные свойства биссектрисы, высоты и медианы:

- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;
- медианы треугольника пересекаются в одной точке;
- высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке.

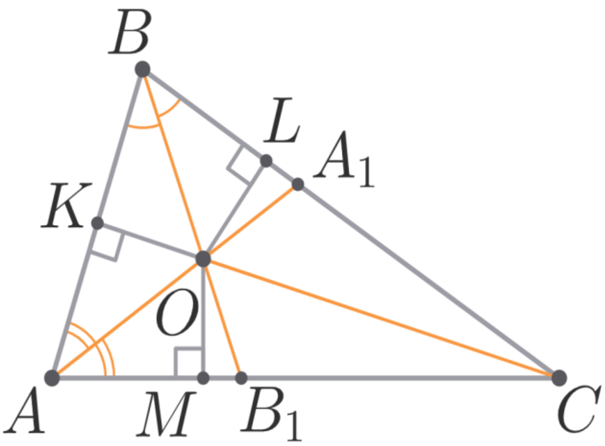
Приведем доказательства этих утверждений:

1. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**

Доказательство:

Возьмем треугольник ABC и проведем из вершины A биссектрису угла AA_1, из вершины B- биссектрису BB_1.

Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA, и BB, треугольника ABC и проведём из этой точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к AB, BC и CA.



Получатся прямоугольные треугольники OKB и OLB, OKA и OMA, треугольники OKB и OLB равны по признаку равенства прямоугольных треугольников (по общей гипотенузе и равным углам, прилегающим к гипотенузе), OKA и OMA тоже равны по признаку равенства прямоугольных треугольников (по общей гипотенузе и равным углам, прилегающим к гипотенузе)

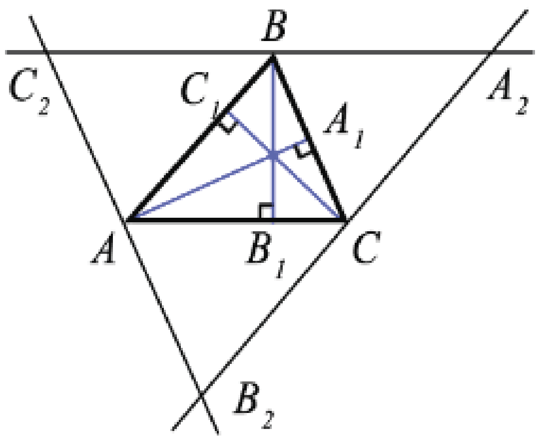
Следовательно, OK=OM и OK =OL. Поэтому OM = OL, т.е. точка O равноудалена от сторон угла ACB. Равноудалена - это значит точка находится на равном расстоянии от сторон угла. Согласно теореме о биссектрисе угла, каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла (примем без доказательства).

И значит, равноудаленная точка O лежит на биссектрисе CC_1, этого угла C. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. ЧТД.

Из доказанного утверждения также следует, что точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон.

2. **Высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке.**

Доказательство:

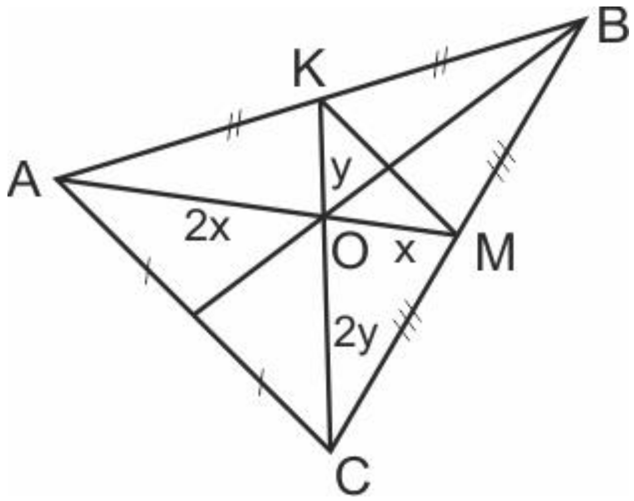


Рассмотрим треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1, и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке. Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник A_2 B_2 C_2 Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB=A_2C$ и

$AB=CB_2$, как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C=CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$. и $C_2B=BA_2$. Кроме того, как следует из построения, CC_1 перпендикулярен A_2B_2, AA_1 перпендикуляр к B_2C_2 и BB_1 к A_2C_2.

Рассмотрим прямые AA_1 BB_1 и CC_1 – это прямые, перпендикулярные сторонам треугольника, и проходящие через середину стороны. Такие прямые называются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке (это тоже теорема, доказательство которой здесь не приводится). Из пересечения серединных перпендикуляров следует, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. ЧТД.

3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.



Проведем в треугольнике ABC медианы AM и CK. Пусть медианы AM и CK пересекаются в точке O. Проведем отрезок, соединяющий точки M и K. Полученный отрезок MK – называется средней линией треугольника ABC.

Попробуем разобраться, что это такое. Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Всего у треугольника 3 средних линии.

Свойство средней линии треугольника основано на теореме, согласно которой в треугольнике каждая средняя линия, соединяющая середины двух сторон, будет параллельна третьей стороне и при этом равна половине длины этой третьей стороны (примем это без доказательств).

Рассмотрим треугольники ОМК и ОАС. Такие треугольники называются подобными.

Разберемся, что такое *подобие геометрических фигур*, в том числе треугольников. Подобными называют одинаковые по форме геометрические фигуры, у которых соответствующие размеры пропорциональны. Например, все квадраты с разными размерами и окружности разных радиусов подобны.

Многоугольники называются подобными, если их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Подобные треугольники — треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного треугольника соответственно пропорциональны сторонам другого треугольника.

Известны три признака подобия треугольников :

1)два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого;

2) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

Таким образом, треугольник ОМК подобен треугольнику ОАС по первому признаку подобия - по двум углам. МК=1/2АС , МК параллельна АС.

Запишем соотношение соответствующих сторон подобных треугольников ОМК и ОАС: ОА/ОМ=ОС/ОК=АС/МК=2/1

Значит, медианы АМ и СК в точке пересечения делятся в отношении 2/1, считая от вершины.

Осталась третья медиана – BL. Предположим, что BL пересекает АМ в точке O_1 Тогда в точке O_1 медианы BL и АМ делятся в отношении 2/1. Но если O_1A/O_1M=ОА/ОМ=2/1, то точка O_1 совпадает с точкой О, и это значит, что три медианы треугольника пересекаются в точке О и делятся в ней в отношении 2/1, считая от вершины. ЧТД.

Следует отметить, что все эти точки пересечения биссектрис, медиан, высот, а также серединных перпендикуляров к сторонам носят название замечательных точек треугольника.

Таким образом, пользуясь учебной литературой, мы изучили и доказали некоторые свойства известных нам специальных чевиан треугольника.

Глава 2. Теорема Чевы и ее применение

2.1 Теорема Чевы и ее доказательство

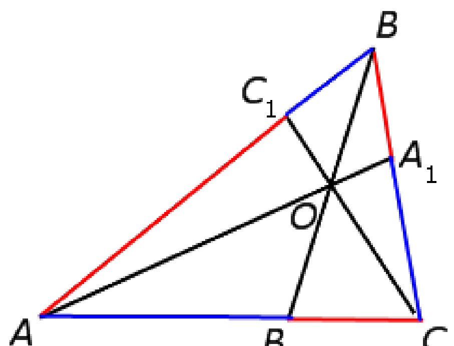
Рассмотрим теорему Чевы о пересечении в одной точке любых чевиан треугольника. Изучить и понять доказательство этой теоремы можно даже в 7 классе, предварительно ознакомившись с некоторыми дополнительными геометрическими понятиями, такими как подобие геометрических фигур, в том числе подобие треугольников. Многоугольники называются подобными, если их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Подобные треугольники — треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного треугольника соответственно пропорциональны сторонам другого треугольника. Число, равное отношению соответствующих сторон подобных треугольников называют коэффициентом подобия k

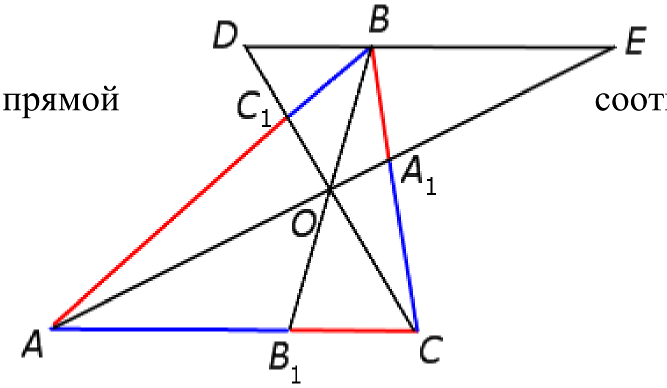
Теорема Чевы.

Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 , то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство:

$AC_1/C_1B \times BA_1/A_1C \times CB_1/B_1A=1$ – равенство (1)



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ. Докажем,если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 **(чевианы)** пересекаются в одной точке, то выполнено равенство (1). Для этого проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC, и обозначим буквами D и C точки пересечения прямых CC_1 и AA_1 с этой прямой соответственно.



$\triangle AC_1C \sim \triangle DC_1B$, => $AC_1/C_1B=AC/DB$ (2)

$\triangle AA_1C \sim \triangle BA_1E$, => $BA_1/A_1C= BE/AC$ (3)

$\triangle CB_1O \sim \triangle DBO$, => $CB_1/OB_1=DB/OB$ (4)

$\triangle AOB_1 \sim \triangle BOE$, => $OB_1/B_1A=OB/BE$ (5)

Перемножая равенства (2 – 5), получим:

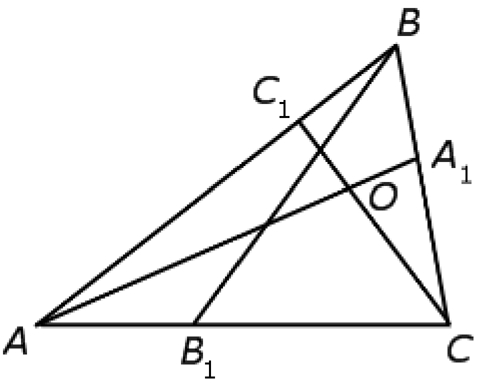
$$AC_1/C_1B\times BA_1/A_1C\times CB_1/OB_1\times OB_1/B_1A=AC/DB\times BE/AC\times DB/OB\times OB/BE$$

$$AC_1/C_1B\times BA_1/A_1C\times CB_1/B_1A =1$$

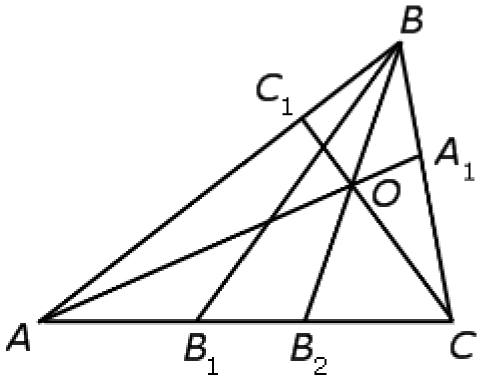
Ч. и Т. Д.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ. Докажем, что, если выполнено равенство (1), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Воспользуемся методом «от противного». С этой целью обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и CC_1 и предположим, что отрезок BB_1 не проходит через точку O



Проведём через точку O отрезок BB_2



Поскольку отрезки AA_1, BB_2 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполнено равенство: $AC_1/C_1B\times BA_1/A_1C\times CB_2/B_2A=1$ (6)

Кроме того, выполнено равенство

$AC_1/C_1B\times BA_1/A_1C\times CB_1/B_1A=1$ (1)

Разделив равенство (6) на равенство (1), получим равенство

$CB_2/B_2A\times B_1A/CB_1=1$

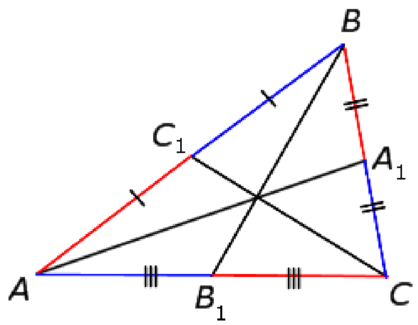
Следовательно, $CB_2/B_2A= CB1/B1A$ (7)

Из равенства (7) вытекает, что точки B_1 и B_2 совпадают. ЧТД.

2.2 Применение теоремы Чевы для доказательства свойств специальных чевиан и решения геометрических задач

Применимь теорему Чевы для доказательства уже известных нам некоторых свойств специальных чевиан.

В Главе I данной работы доказана теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Приведём другое доказательство этой теоремы, основанное на теореме Чевы. С этой целью рассмотрим медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Поскольку из определения медианы следует, что:

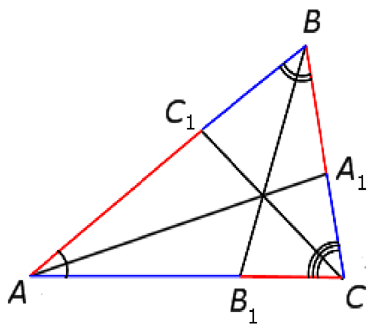


$AC_1/C_1B=1$, $BA_1/A_1C=1$, $CB_1/B_1A=1$,

то выполнено равенство из теоремы Чевы:

$AC_1/C_1B\times \quad BA_1/A_1C\times \quad CB_1/B_1A \quad =1$ (1), следовательно, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. ЧТД.

В Главе I данной работы доказана теорема о том, биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Приведём **другое доказательство** этой теоремы, основанное на теореме Чевы. Рассмотрим



биссектрисы AA1, BB1, CC1 треугольника ABC

Если применить сведения о свойстве биссектрисы треугольника, т.е. факт, что биссектриса, проведенная из вершины треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то справедливы равенства:

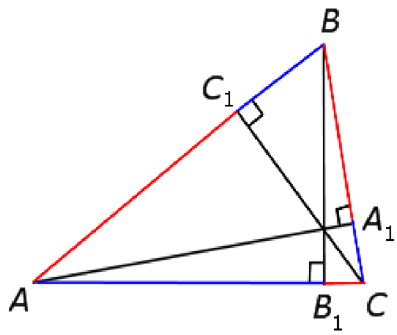
$$AC_1/C_1B=AC/BC, \quad BA_1/A_1C=AB/AC, \quad CB_1/B_1A=BC/AB$$

Если перемножить эти три равенства, то мы получим равенство:

$$AC_1/C_1B\times BA_1/A_1C\times CB_1/B_1A=1$$

из которого вытекает, что биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. ЧТД.

Попробуем доказать с помощью теоремы Чевы, что высоты в остроугольном треугольнике пересекаются в одной точке.



Решение: $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ по I признаку подобия $\Rightarrow CA_1/CB_1=CA/CB$;

аналогично, $\Delta CC_1B \sim \Delta AA_1B$

$\Rightarrow BC_1/A_1B=CB/AB$;

аналогично, $\Delta BB_1A \sim \Delta CC_1A \Rightarrow AB_1/AC_1=AB/AC$.

Перемножая эти равенства, получим:

$$CA_1/CB_1\times BC_1/A_1B\times AB_1/AC_1=CA/CB\times CB/AB\times AB/AC=1$$

Отсюда по теореме Чевы, следует, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. ЧТД.

Аналогичным образом теорема Чевы может быть применена в доказательстве свойства высот произвольного треугольника пересекаться в одной точке.

Таким образом, данная теорема позволяет доказать свойства специальных чевиан - биссектрисы, медианы и высоты простым способом, в то время когда традиционные подходы к доказательством, приведенные в Главе I , более длинные и сложные.

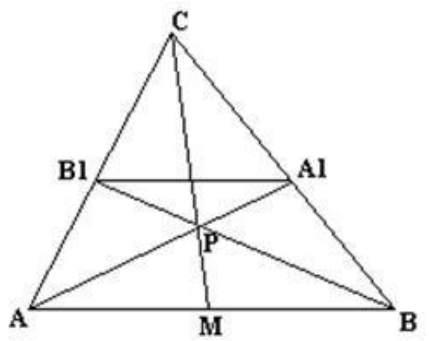
Рассмотрим применение теоремы Чевы для решения геометрических задач

Задача 1. Дано: △ ABC, CM – медиана

$P \in CM$, $AP \cap BC = A_1$, $BP \cap AC = B_1$

Доказать: $A_1B_1 \parallel AB$

Решение:



Прямые $AA_1 \cap BB_1 \cap CM = P$

По теореме Чевы:

$CA_1/A_1B \times BM/MA \times AB_1/B_1C = 1$

$BM/MA = 1$ (по опр. медианы)

$\Rightarrow CA_1/A_1B = AB_1/B_1C$ и $CA_1/CB = CB_1/CA$

$\triangle CB_1A_1 \sim \triangle CAB$ ($CA_1/CB = CB_1/CA$; $\angle C$ – общий) $\angle CB_1A_1$ и $\angle CAB$ – соответственные при прямых B_1A_1 и AB и секущей AC, $A_1B_1 \parallel AB$ Ч и Т. Д.

Задача 2. Дано: В ΔABC точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC,AB ,причем отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. $AC_1/C_1B = 1/3$; $BA_1/A_1C = 3/2$.Найдите отношение $AB_1 : B_1C$. В каком отношении точка O делит отрезок AA_1?

Решение: 1) Так как отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются, то выполняется равенство из Чевы и следовательно, $AC_1/C_1B \times BA_1/A_1C \times CB_1/B_1A = 1$

$\Rightarrow 1/3 \times 3/2 \times CB_1/B_1A = 1$, $CB_1/B_1A = 2/1$, $AB_1/B_1C = 1/2$

Таким образом, применение теоремы Чевы позволяет решать геометрические задачи, в условия которых сказано о пресекающихся чевианах треугольника. Особенно полезно применять теорему при нахождении соотношений отрезков сторон треугольника, образованных пересечением чевиан.

Заключение

Рассмотрение теорем о свойствах специальных чевиан треугольника, в том числе свойстве биссектрисы, медианы и высоты пересекаться в одной точке, позволило сделать вывод о том, что доказательства этих теорем без применения теоремы Чевы, достаточно объемны и сложны для запоминания. В тоже время, изучение теоремы Чевы показало, что ее доказательство будет легко понять, предварительно ознакомившись с некоторыми дополнительными геометрическими понятиями, такими как подобие геометрических фигур.

Использование теоремы Чевы для доказательства свойств специальных чевиан делает эти доказательства более легкими и компактными по сравнению с доказательствами традиционным способом, приведенными в школьных учебниках и рассмотренными в Главе I данной работы. Кроме того, применение теоремы Чевы позволяет решать геометрические задачи, в условия которых сказано о пресекающихся чевианах треугольника. Изучение теоремы Чевы вызвали интерес к дальнейшему рассмотрению таких теорем, как теоремы Менелая, Стюарта, Ван-Обеля и других математиков, внесших вклад в развитие геометрии треугольников.

Таким образом, в результате работы:

- Изучено понятие "чевиана треугольника" и его происхождение.
- Установлено, что биссектрисы, медианы и высоты треугольника являются специальными случаями чевианы и могут пересекаться в одной точке.
- Изучена и применена теорема Чевы о пересечении в одной точке любых чевиан треугольника.
- Доказаны свойства биссектрис, медиан и высот треугольника с использованием теоремы Чевы.
- Подтверждена гипотеза о том, что использование теоремы Чевы делает доказательства свойств специальных чевиан более легкими и компактными.
- Представлена презентация, которая поможет ученикам 7 классов познакомиться с понятием "чевианы треугольника" и их свойствами.

Список литературы и ЦОР

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С. Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. Геометрия. 7-9 кл. : учебник для общеобразоват.орг. – 3-е изд. – Москва : Просвещение, 2014, -382 с.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С. Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.-М.: Вита-пресс, 2006.
3. Колина Н.К. Теорема Менелая и теорема Чевы в школьном курсе математики. Учебно-методическое пособие https://www.uchportal.ru/load/24-1-0-23380
4. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — 1978 // Библиотека Mathedu.Ruhttps://www.mathedu.ru/text/kokseter_greyttser_novye_vstrechi_s_geometriey_1978/p0/
5. Фахретдинова Виктория Александровна Из опыта преподавания темы «Применение теорем Чевы и Менелая при решении геометрических задач» в университетских классах // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. 2017. №10. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/iz-opyta-prepodavaniya-temy-primenenie-teorem-chevy-i-menelaya-pri-reshenii-geometricheskih-zadach-v-universitetskih-klassah (дата обращения: 17.03.2024).
6. https://budu5.com/manual/chapter/3312
7. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/6165/%D0%A7%D0%95%D0%92%D0%AB
8. https://www.resolventa.ru/teorema-chevy