Научное общество учащихся «Эврика»
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Лицей 180»
Ленинского района г. Н. Новгорода

Исследование удивительных треугольников

Выполнил:
Низовцев Владислав
Ученик 8 «М» класса
Научный руководитель:
Левина Н.А.,
учитель математики.

г. Нижний Новгород
2024

Содержание:

Введение:

На протяжении всей своей сознательной жизни каждый человек проявляет неподдельный интерес к такой геометрической фигуре, как треугольник. Игра в пирамидки, складывание оригами, составление аппликации из цветной бумаги с помощью треугольных фигурок - все эти действия дают ребёнку первое представление о треугольниках. Треугольники существуют в природе, в архитектуре, в искусстве и в окружающей нас жизни.

Актуальность данного проекта определяется важностью умения видеть математику в мире, в котором мы живём, необходимостью добывать знания о треугольниках, а также применением полученных знаний в повседневной жизни.

Цель проекта: Найти и изучить необычные треугольники, встречающиеся в природе, в различных областях знаний, в практической деятельности и школьной математике.

Задачи:

1. Изучение исторических сведений о геометрии;
2. Исследование олимпиадных задач на тему: треугольник;
3. Изучение сведений о нахождении треугольников в окружающем мире;
4. Создание своих задач.

Гипотеза: возможно, треугольник используется не только в математике и геометрии, но и в повседневной жизни.

1. Геометрия и её история

Геометрия - одна из древнейших отраслей математики. Геометрические тела были известны задолго до того, как были выведены математические принципы. Геометрия — это математическое исследование точек, линий, плоскостей, замкнутых плоских фигур и твердых тел. Используя это, можно описать или построить каждый видимый и невидимый предмет.

Геометрия - одна из самых древних наук. Возникла геометрия в Египте более 4000 лет назад. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» - по-гречески земля, а «метрео» -мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений: людям нужно было определять расстояние между точками, площади участков и объемы тел (употребляемых, например, при постройке жилищ). Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей и в начале своего развития служила преимущественно практическим целям. Возникла геометрия в Египте более 4000 лет назад. Вот что пишет о зарождении геометрии греческий историк Геродот, живший около 2500 лет назад: «Сезострит, египетский царь, произвел деление земель, отмерив каждому египтянину, участок по жребию, сообразно этим участкам с их владельцев ежегодно взимал налоги.

Если Нил заливал чей-нибудь участок, то пострадавший обращался к царю и докладывал о случившимся. Тогда царь посылал землемеров (геометров), они измеряли, на сколько уменьшился участок и сообразно этому понижали налог. Вот откуда пришла геометрия и перешла из этой страны в Грецию».

В течение многих веков постепенно накапливали древние египтяне различные научные знания, в том числе знания по геометрии. Они сумели довольно точно определять площади фигур, объемы некоторых тел, решать некоторые другие геометрические задачи.

Но геометрии, как науки, у них не было. У них было много различных правил - рецептов, не соединенных между собой общей идеей, не приведенных в единую стройную систему. Этими рецептами владели чаще всего жрецы храмов, которые держали их в секрете.

Цари древнего Египта постоянно вели долгие изнурительные войны, которые ослабляли экономическую мощь страны. Были периоды, когда Египет завоевывался разными другими народами – это были периоды жестокой эксплуатации страны – наука и искусство пришли в упадок.

Но к северу от Египта, уже зародилось новое государство – Греция. Греческие купцы посещали Египет и, возвращаясь, много рассказывали об этой чудесной стране. Вместе с купцами Египет стали посещать ученые. И достижения египетской науки постепенно стали известны древним грекам.

Но Греки не просто усвоили достижения египтян. Они исправили их ошибки и развивали геометрию дальше. Именно в древней Греции около 2500 лет назад геометрия стала математической наукой.

В VII веке до н.э. центром математического творчества становится так называемая пифагорейская школа в южной Италии. Здесь были открыты несоизмеримые отрезки, создано учение о подобии, найдены способы построения некоторых правильных многоугольников и многогранников, доказана теорема Пифагора и т.д.

К 300-м годам до н.э. геометрия становится самостоятельной математической наукой. К этому времени древнегреческий ученый Евклид (III в. до н.э.) написал книгу, называемую им «Начала», написание которой относится к 325-300 годам до н.э.

Евклид собрал почти все, что было создано до него, по геометрии и привел в стройную единую систему. Он взял за основу некоторые положения, так называемые аксиомы (постулаты), и из них путем последовательных рассуждений сумел вывести все теоремы геометрии. Т.е., в этой книге Евклид подытожил накопленные к тому времени геометрические знания и попытался дать законченное аксиоматическое изложение этой науки. «Начала» Евклида более полутора тысяч лет переписывались от руки в Греции, Италии, Египте, Индии, Средней Азии и других странах. С возникновением книгопечатания «Начала» сотни раз перепечатывались на всех языках мира. Это одна из наиболее распространенных на земном шаре книг. Написана она была настолько хорошо, что в течение 2000 лет всюду преподавание геометрии велось либо по переводам, либо по незначительным переработкам книги Евклида. Например, таким пособием был учебник А.П. Киселева, по которому советская школа работала до середины XX столетия.

Продуманное и глубоко логическое изложение геометрии, данное в книге Евклида, привело к тому, что математики не мыслили возможности существования геометрии, отличной от евклидовой. Немецкий философ-идеалист XVIII в. И. Кант и многие его последователи считали, что понятия и идеи евклидовой геометрии (единственно возможной, чуть ли не божественной) были заложены в человеческое сознание еще до того, как человек научился что-либо осознавать.

Ученые, жившие после Евклида добавили к «Началам» несколько новых теорем, кое-что изменили, но основная масса материала, границы, определяющие ее объем и метод, остались прежними. Поэтому геометрия, которую мы изучаем, называется Евклидовой.

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287 -212 гг. до н. э.), Апполоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие учёные.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя – в XVII в. н. э. – и были связаны с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Французский математик и философ Р. Декарт (1596 – 1650) предложил новый подход к решению геометрических задач: ввёл метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

На Руси самое древнее сочинение по арифметике, сохранившееся до нас, написано в 1196 году новгородским монахом Кириком. Самое древнее сочинение, сохранившееся до наших дней и содержащее геометрические сведения, написано в начале XVII века (вероятно, в 1607 году), оно называлось «Устав ратных дел». В этом сочинении содержатся правила (рецепты) для решения задач на определение расстояния до предметов. Никаких теорем или доказательств верности не приводится.

В других рукописях («Книга и письма» и другие) даются правила изменения площадей, нахождения расстояний, определение объемов тел. В этих правилах много ошибок и совсем не приводится доказательств.

Распространению на Руси геометрических знаний препятствовала церковь. Попы боялись, что вместе с книгами с запада в Россию будет проникать католическая религия, поэтому вводили жестокие меры против тех, кто занимался математикой. В одном древнерусском поучении говорится: «богомерзостен перед богом всякий, кто любит геометрию».

В течение XVII века геометрические знания на Руси распространялись медленно.

В XVIII веке геометрия получила большое распространение. В России была открыты Академия наук, в Москве был открыт университет, во многих городах открывались школы и гимназии, появились учебники геометрии, как отечественные, так и переводные.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказательства пятого постулата Евклида («И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»), который из-за сложности формулировки обычно заменяют аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Н. И. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного, но не получил при этом противоречивых утверждений. В 1826 г. он сообщил об открытии новой геометрии, отличной от геометрии Евклида. Такая геометрия получила название геометрии Лобачевского. К аналогичным выводам пришёл венгерский математик Я. Бойяи и немецкий математик К. Ф. Гаусс.

Открытие новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас мира может быть только евклидова геометрия.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826 – 1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

В настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо её значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науке и техники и, конечно же, в самой математике.

2.Треугольник

В нашей повседневной жизни мы часто сталкиваемся с такой фигурой как треугольник. Недавно, участвуя в одной из олимпиад по математике я встретил интересные задачи, которые, как оказалось можно решить с использованием треугольников.

Разберём эти задачи.

Задача№1: На хоккейной площадке лежат 3 шайбы A, B, C. Хоккеист бьёт по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться в исходном положении?

Решение:

1) Зададим обход треугольника ABC

2) При ударе по шайбе C, её положение меняется на C_1. Так же меняется и обход треугольника на противоположный.

3) Таким образом происходит чередование направления контура; за 25 ходов нельзя получить исходное положение.

Задача№2: На клетчатой бумаге постройте два прямоугольных и равносторонних треугольников таким образом, чтобы общая часть этих треугольников являлась:

1. Треугольником, площадь которого равна удвоенной площади одной клетки
2. Прямоугольником той же площади
3. Квадратом той же площади

Решение:

4. Удивительные треугольники

4.1.Треугольник Пенроуза

В жизни встречается колоссальное количество треугольников. Например – в искусстве. Пока я ходил на рисование, меня так же заинтересовала тема треугольника.

В моих картинах можно встретить примеры треугольников.

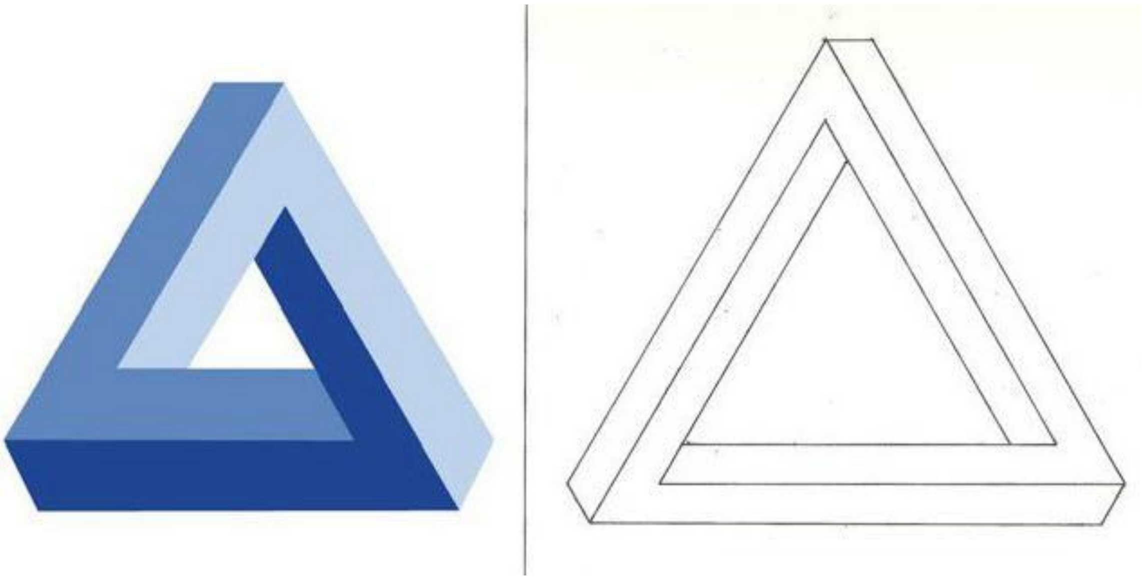
Трибар очень заинтересовал меня, как только я о нём услышал, ведь тема искусства мне так близка. Я начал исследовать информацию на данную тему.

Трибар был изобретен в 1934 году шведским художником Оскаром Реутерсвардом, работы которого, однако, оставались в значительной степени неизвестными публике до 1980-х годов.

Его еще раз изобрел математик Роджер Пенроуз, в честь которого он также назван. В 1954 году он принял участие в международном конгрессе математиков в Амстердаме, по случаю которого была организована выставка картин голландского художника-графика М.К. Эшера. Вдохновленный изображениями Эшера, он сам пытался конструировать невозможные фигуры. Принцип невозможных фигур казался ему наиболее ясно реализованным в Трибаре. Вместе со своим отцом, Лайонелом Пенроузом, который был вдохновлен проектами своего сына по созданию бесконечной лестницы Пенроуза, он опубликовал статью о Tribar в British Journal of Psychology в 1958 году.

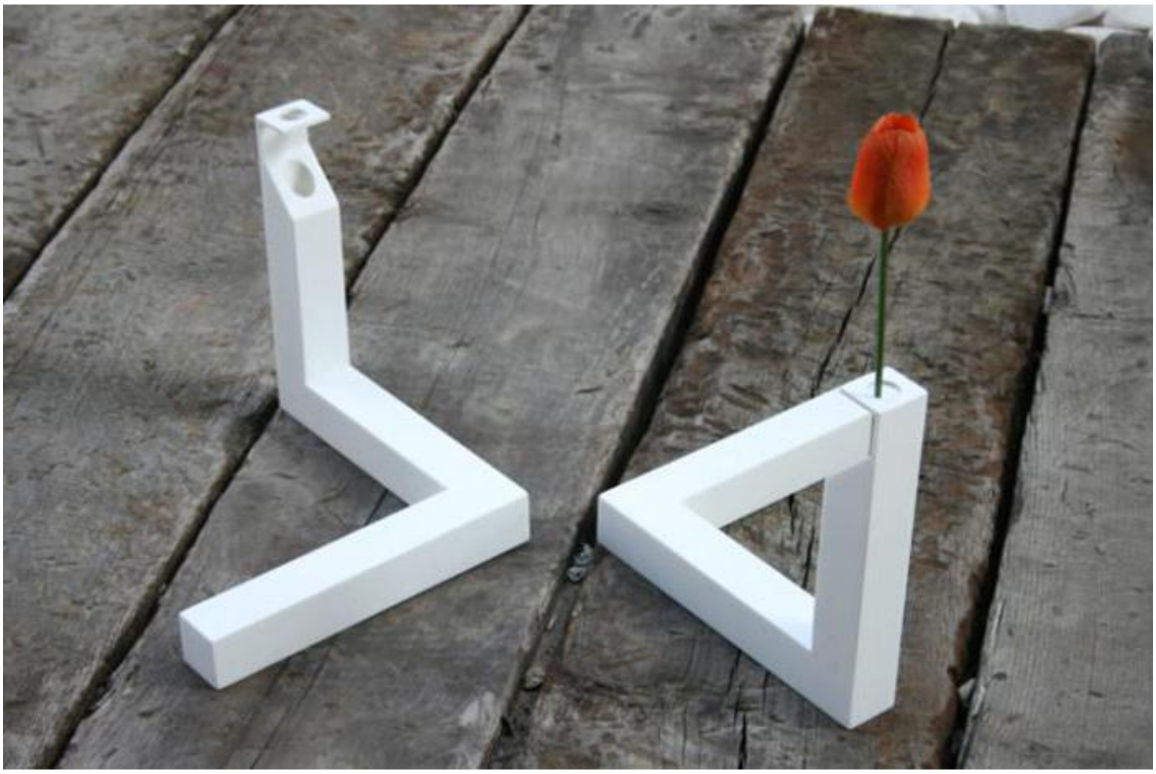
В 20 веке Рейтерсвард экспериментировал с изображением невозможных фигур, в том числе фигур Трибара, с 1934 года. Однако только в 1980-х его творчество привлекло внимание масс. В то время Шведская почта также опубликовала три марки с невозможными объектами из Reutersvärds, основанные на принципах, аналогичных принципам Tribar.

Невозможное все-таки возможно. И яркое подтверждение тому – невозможный треугольник Пенроуза. Открытый еще в прошлом веке, он до настоящего время часто встречается в научной литературе. И как бы это удивительно ни звучало, но его можно изготовить даже самостоятельно. И сделать это совсем несложно. Многие любители рисовать или собирать оригами уже давно смогли это сделать.



Понимают под данными определениями одну из основных невозможных фигур. Если судить по названию, то получить подобную фигуру в реальности невозможно. Но на практике было доказано, что сделать это все-таки можно. Вот только форму треугольника фигура будет принимать, если смотреть на нее с определенной точки под нужным углом. Со всех остальных сторон фигура вполне реальная. Она представляет собой три ребра куба. И изготовить подобную конструкцию легко.

Возможно, рисунок Реутерсварда так и остался бы малоизвестным. Но в 1954 году шведский математик Роджер Пенроуз написал статью о невозможных фигурах. Это стало вторым рождением треугольника. Правда, ученый представил его в более привычном виде. Он использовал не кубики, а балки. Три балки соединялись между собой под углом в 90 градусов. Отличие также было в том, что Реутерсвард использовал параллельную перспективу во время рисования. А Пенроуз применил перспективу линейного характера, что придало рисунку еще больше невозможности. Такой треугольник был опубликован в 1958 году в одном из британских журналов о психологии.



В восьмидесятых годах прошлого столетия трибар и другие невозможные фигуры изображались на государственных почтовых марках Швеции. Продолжалось это на протяжении нескольких лет.

В конце прошлого века (а точнее в 1999 году) в Австралии была создана скульптура из алюминия, изображавшая невозможный треугольник Пенроуза. Она достигала в высоту 13 метров. Подобные скульптуры, только меньшие по размерам, встречаются и в других странах.

Как можно было уже догадаться, треугольник Пенроуза на самом деле не является треугольником в обычном понимании. Он представляет собой три грани куба. Но если смотреть с определенного угла, получается иллюзия треугольника за счет того, что на плоскости полностью совпадают 2 угла. Зрительно совмещается ближний от смотрящего и дальний углы.

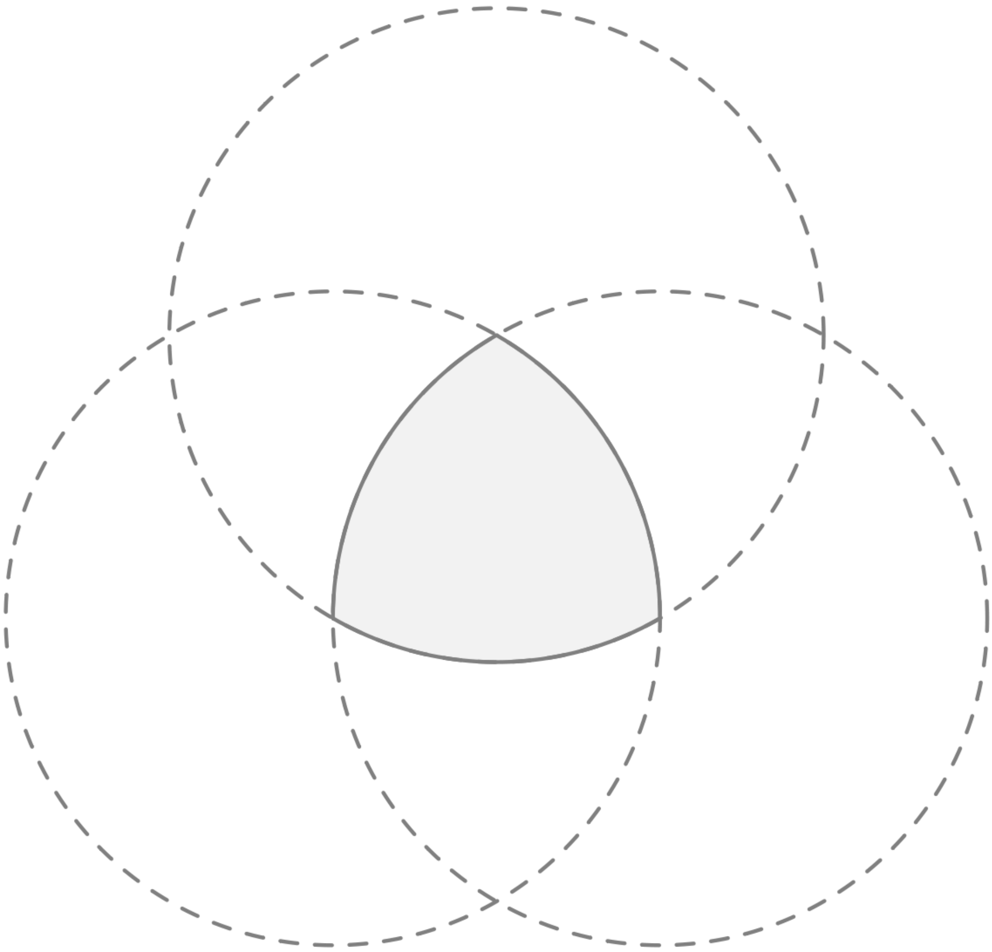
Если быть внимательным, то можно догадаться, что трибар является не чем иным, как иллюзией. Реальный вид фигуры может выдать тень от нее. По ней видно, что на самом деле углы не соединяются. Ну и, конечно же, все становится понятно, если фигуру взять в руки.

3.2. Треугольник Рёло

Занимаясь уроками технологии, меня очень заинтересовал вопрос: «Как же высверлить квадратное отверстие?» Оказывается, и для такого действия тоже нужен треугольник, только не простой.

Треугольник Рёло́ представляет собой область пересечения трёх равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусами, равными его стороне. Негладкая замкнутая кривая, ограничивающая эту фигуру, также называется треугольником Рёло.

Треугольник Рёло является простейшей после круга фигурой постоянной ширины. То есть если к треугольнику Рёло провести пару параллельных опорных прямых, то расстояние между ними не будет зависеть от выбранного направления. Это расстояние называется шириной треугольника Рёло.



Среди прочих фигур постоянной ширины треугольник Рёло выделяется рядом экстремальных свойств: наименьшей площадью, наименьшим возможным углом при вершине, наименьшей симметричностью относительно центра. Треугольник получил распространение в технике — на его основе были созданы кулачковые и грейферные механизмы, роторно-поршневой двигатель Ванкеля и даже дрели, позволяющие сверлить (фрезеровать) квадратные отверстия.

Название фигуры происходит от фамилии немецкого механика Франца Рёло. Он, вероятно, был первым, кто исследовал свойства этого так называемого криволинейного треугольника; также он использовал его в своих механизмах.

Рёло не является первооткрывателем этой фигуры, хотя он и подробно исследовал её. В частности, он рассматривал вопрос о том, сколько контактов (в кинематических парах) необходимо, чтобы предотвратить движение плоской фигуры, и на примере искривлённого треугольника, вписанного в квадрат, показал, что даже трёх контактов может быть недостаточно для того, чтобы фигура не вращалась.

Некоторые математики считают, что первым продемонстрировал идею треугольника из равных дуг окружности Леонард Эйлер в XVIII веке. Тем не менее подобная фигура встречается и раньше, в XV веке: её использовал в своих рукописях Леонардо да Винчи. Треугольник Рёло есть в его манускриптах A и B, хранящихся в Институте Франции[10], а также в Мадридском кодексе.

Mappamundi. Леонардо да Винчи, примерно 1514 год

Примерно в 1514 году Леонардо да Винчи создал одну из первых в своём роде карт мира. Поверхность земного шара на ней была разделена экватором и двумя меридианами (угол между плоскостями этих меридианов равен 90) на восемь сферических треугольников, которые были показаны на плоскости карты треугольниками Рёло, собранными по четыре вокруг полюсов.

Ещё раньше, в XIII веке, создатели церкви Богоматери в Брюгге использовали треугольник Рёло в качестве формы для некоторых окон.

3.3. Треугольник Паскаля

На уроках алгебры мы занимались формулами сокращённого умножения. Изучили мы только программу, но мне стало интересно, а как возвести сумму в большую степень. Оказывается, всё очень даже просто. В этом нам так же помогает треугольник Паскаля.

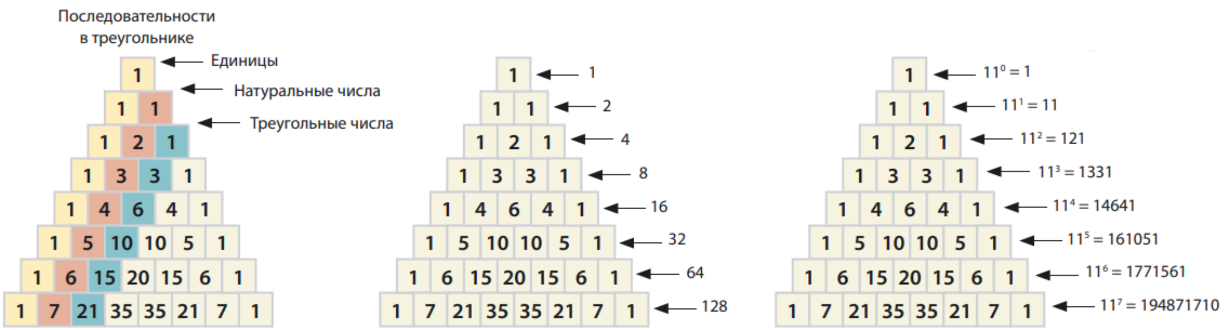
Эти треугольники похожи на детские пирамидки из кубиков со случайным набором чисел, но Блез Паскаль (и многие другие) собирали их для того, чтобы исследовать взаимоотношения между биномиальными коэффициентами (тот самый бином Ньютона!). Это числа и их сочетания, которые изучаются теорией множеств, а подобные треугольники подобны математическим калейдоскопам, бесконечные сочетания элементов в которых позволяют заглянуть в самую суть чисел.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Внешняя «оболочка» треугольника Паскаля составлена из единиц, а под ними находятся натуральные числа (мы используем их при порядковом счете). Можно также представить, что вокруг треугольника лежит бесконечное число ячеек с нолем.

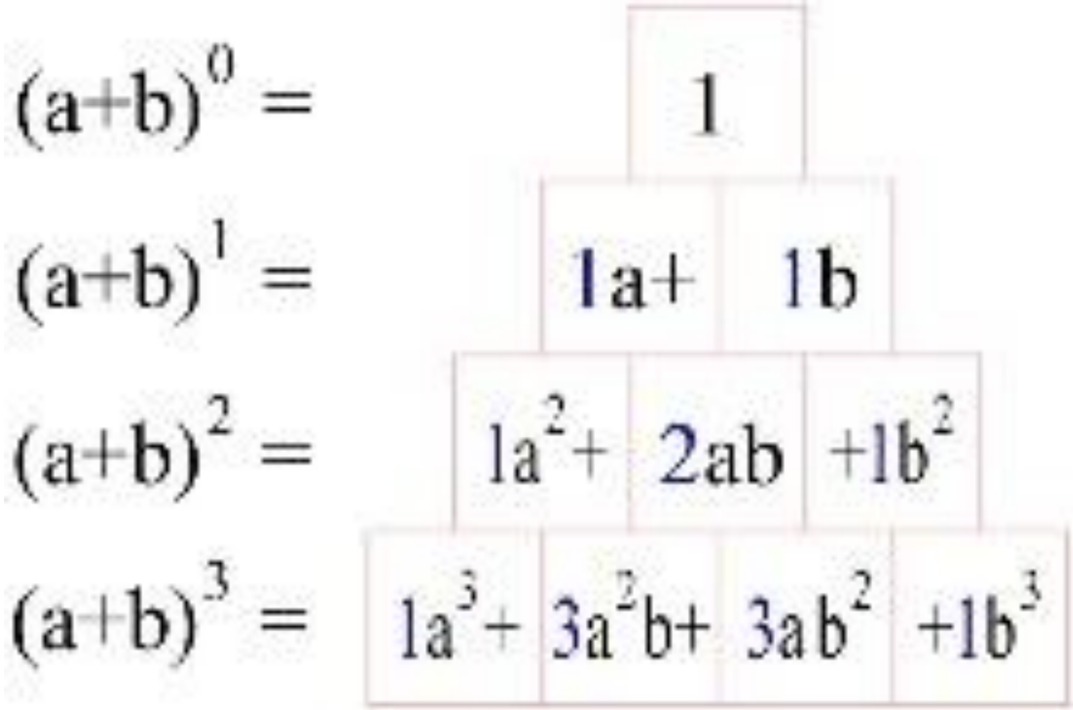
Блез Паскаль не был изобретателем этой треугольной фигуры, но его исследования в 50-х гг. XVII в. были настолько важными, что им присвоили имя этого французского математика. Вероятнее всего, впервые такой треугольник был собран китайским ученым Цзя Сянем в XI в. В принципе, собрать такой треугольник несложно (здесь и сейчас обсуждать бином Ньютона мы не будем). Сумма двух соседних чисел дает число под ними. Единицы, из которых формируются внешние грани треугольника, не имеют соседей (0 + 1 = 1). Вторую диагональ треугольника образуют натуральные числа — каждое из них является суммой предыдущего числа и единицы.

В треугольниках скрыто множество других числовых последовательностей. Самое интересное начинается с третьей диагонали. Члены этой последовательности — 1, 3, 6, 10 и т. д. — являются треугольными числами. На их основе можно составлять правильные треугольники на плоскости. Числа четвертой диагонали — тетраэдральные, представляющие пирамиду, в основании которой лежит треугольник (то есть трехмерный треугольник). Пятая диагональ состоит из пентатопных чисел, формирующих гиперпирамиды (четырехмерные пятиячеечники) — и так далее; каждая последующая диагональ добавляет в численный ряд одно пространственное измерение. Более того, сдвинув ряды треугольника так, чтобы диагонали превратились в колонки и добавив их «новые» диагонали, мы получим последовательность Фибоначчи!



Треугольник содержит несколько удивительных числовых последовательностей. Сумма чисел в каждом ряду вдвое больше, чем в предыдущем. Каждый ряд также содержит степени числа 11.

Элементы в строках треугольника являются коэффициентами разложения бинома Ньютона.

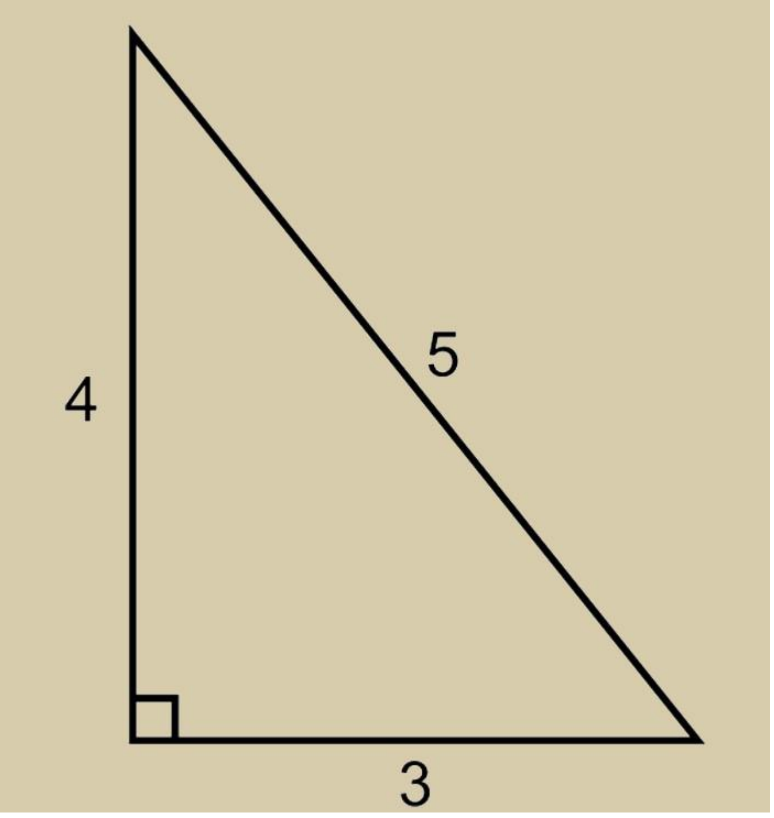


3.4 Египетский треугольник

Идя по улице, я задался очень интересным вопросом: «Как же люди в древности делали прямые углы на плоскости, без использования современных инструментов?» На этот вопрос я так же нашёл ответ, связанный с треугольником.

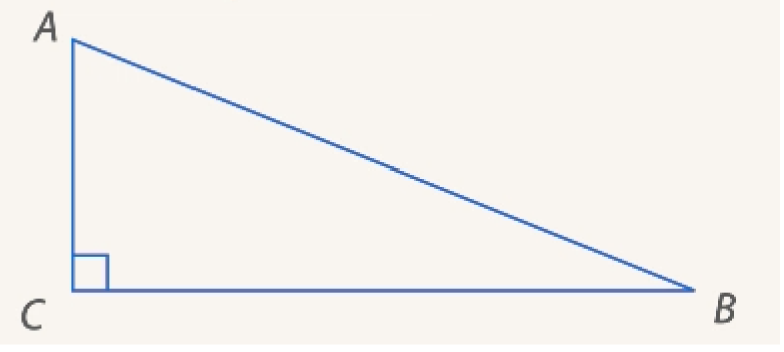
О египетском треугольнике и его свойствах хорошо известно ещё с древних времён. Эта фигура широко применялась в строительстве для разметки и построения правильных углов.

Создателем этой геометрической конструкции является один из величайших математиков древности Пифагор. Именно благодаря его математическим изысканиям мы можем в полной мере использовать все свойства данного геометрического построения в строительстве. Важно! Принято считать, что толчком к открытию этой геометрической фигуры послужило путешествие Пифагора в Африку, где он увидел египетские пирамиды. Возможно, именно они стали прообразом данной конструкции. Можно предположить, что математические навыки позволили Пифагору заметить закономерность в формах строения. Дальнейшее развитие событий можно легко представить. Базовый анализ и построение выводов создали одну из самых значимых фигур в истории. Скорее всего, в качестве прообраза была выбрана именно пирамида Хеопса из-за своих практически совершенных пропорций.



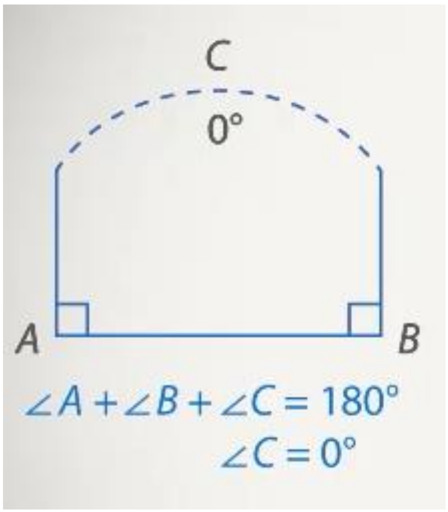
3.5 Прямоугольный треугольник

По определению, прямоугольный треугольник – это треугольник, в котором есть прямой угол.

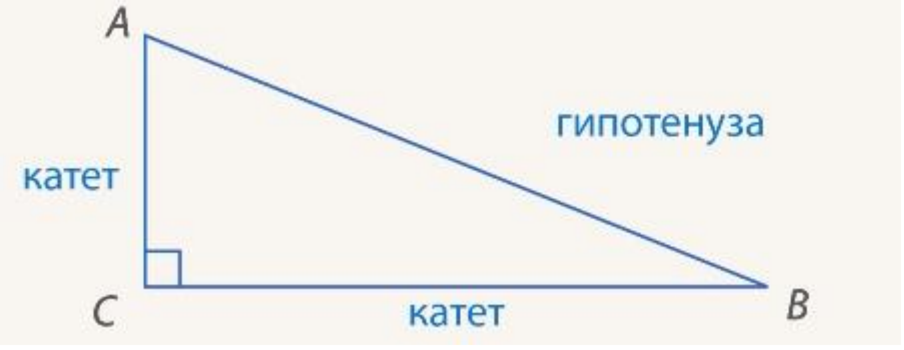


Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^{\circ}$)

В прямоугольном треугольнике только один прямой угол. Если бы их было два, то тогда сумма этих двух углов уже была бы равна 180°, а значит, на последний угол пришлось бы 0°, чего в треугольнике быть не, т. к. по теореме о сумме углов треугольника $180^{\circ} = \angle A + \angle B + \angle C$.

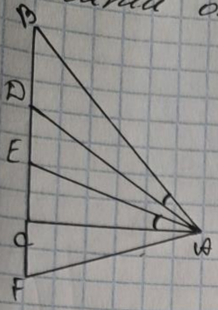


Так что можно говорить только о треугольнике, в котором один прямой угол. Вспомним, что стороны, заключающие прямой угол – катеты, а третья сторона – напротив прямого угла – гипотенуза.



Рассмотрим задачу на эту тему.

Задача: В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 50°$. На стороне BC взяты точки D и E, так, что $\angle BAD = \angle CAE = 10°$. Найти отношение отрезков BD : CE.



Решение:

1) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 50° = 40°$

$\angle DAE = \angle A - 2 \cdot 10° = 50° - 20° = 30°$

2) Сначала нужно догадаться до решения, а потом доказывать факт. „Наверное, BD в 2 раза больше CE.

3) Построим CF, $CF = CE$, тогда $\triangle AEF$ - равнобедр., т.к. AC - высота и медиана, то $AF = AE$ и $\angle EAC = \angle FAC = 10°$.

4) Рассмотрим $\triangle ABE$, $\angle BAE = 40°$, $\angle B = 40°$ $\Rightarrow$ $\triangle ABE$ - равносторонний, $AE = BE$.

5) Рассмотрим $\triangle AFD$, $\angle DAF = 30° + 10° + 10° = 50°$, $\angle ADC = 90° - (30° + 10°) = 50°$, тогда $\triangle AFD$ - равнобедр, $AF = FD$

6) $AE = BE$
$AF = FD$
$AE = AF$ $\Rightarrow$ $BE = FD$

$BD + DE = DE + EF$

$BD = EF$, $EF = 2EC$

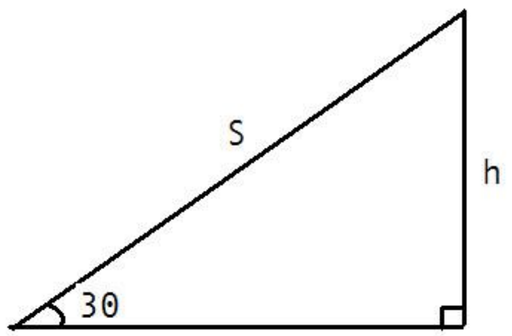
$BD = 2EC$,

$BD : EC = 2 : 1$, чтд.

Ответ: 2 : 1

3.5.1.Прямоугольный треугольник с углом в 30^o

Особый интерес представляет прямоугольный треугольник, у которого один из углов равен 30°: Несложно вычислить его второй угол. Он будет равен 60°: Оказывается, у данного треугольника катет, лежащий против угла в 30° (BC), вдвое меньше гипотенузы. Докажем это утверждение. Для это приложим к ΔABC другой, равный ему ΔACD, получив, по сути, его зеркальное отображение: Так как ∠B = 60°, то и ∠D = 60°. Величина угла ∠BAD равна сумме углов ∠BAC и ∠CAD: В итоге получается, что в ΔABD каждый из углов 60°. Это означает, что он является равносторонним, то есть его стороны равны. В частности AB=BD, но BD состоит из двух одинаковых отрезков CD и BC, т.е. BD = 2BC. В итоге получаем, что AB = 2BC.Именно это и необходимо было доказать. Аналогично с помощью такого же построения можно доказать обратное утверждение – у прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза вдвое длиннее одного из катетов, острый угол (тот самый, который лежит против этого катета) равен 30.

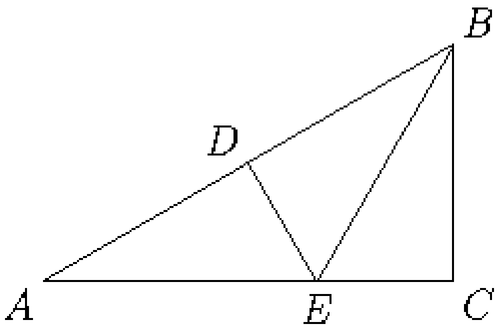


Разберём задача на эту тему.

Незнайка думает, что только равносторонний треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Прав ли он?

Решение:

Возьмём прямоугольный треугольник *ABC*, где угол $A = 30^{\circ}$. Пусть *D* — середина гипотенузы *AB*. Разрежем треугольник по перпендикуляру *DE* к гипотенузе (*E* лежит на *AC*) и по отрезку *EB*. Мы получили три прямоугольных треугольника. Треугольники *ADE* и *EDB* равны по двум катетам (*AD* = *DB*, *DE* — общая), а треугольники *EBD* и *EBC* равны по катету и гипотенузе (*DB* = *CB*, *BE* — общая).



Ответ: Незнайка неправ.

3.5.2.Медиана в прямоугольном треугольнике

Медиана в прямоугольном треугольнике соединяет вершину треугольника и середину противоположной стороны.

Все медианы прямоугольного треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении два к одному.

В задачах чаще всего речь идет о медиане, проведенной к гипотенузе.

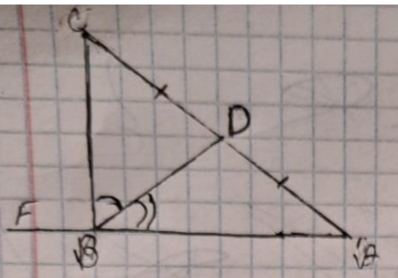
Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы и радиусу описанной около прямоугольного треугольника окружности.

Свойства медианы, проведенной к гипотенузе, позволяют выразить ее длину через катеты и острые углы прямоугольного треугольника.

Так же разберём одну задачу на эту тему.

Докажите, что треугольник, в котором медиана равна половине стороны, к которой она проведена, является прямоугольным. Найдите наибольшее количество доказательств.

Решение:



Дано: $\triangle ABC$,

CD-медиана

Доказать; $\angle C=90°$

Доказательство:

Способ 1:

1) $\angle A+\angle ABD+\angle DBC+\angle C=180°$

2) $\angle A=\angle ABD$, $\angle C=\angle DBC$

3) $\angle A+\angle ABD+\angle DBC+\angle C=2\angle ABC+2\angle DBC=$

$=2(\angle ABD+\angle DBC)=2\cdot\angle ABC=180$;

4) То. $\angle ABC=90°$

Способ 2:

1) $\angle FBC=\angle A+\angle C$

2) $\angle A=\angle ABD$, $\angle C=\angle DBC$

3) $\angle FBC=\angle ABD+\angle DBC=\angle ABC$

4) $\angle FBC+\angle ABC=180°$, $\angle FBC=\angle ABC \Rightarrow \angle ABC=90°$

Способ 3:

1) Рассмотрим $\triangle ABD$; $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$

2) Рассмотрим $\triangle DBC$; $\angle ADB = \angle C + \angle DBC$

3) В $\triangle ABD$ $\angle A = \angle ABD$

4) В $\triangle DBC$ $\angle C = \angle DBC$

5) $\angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$

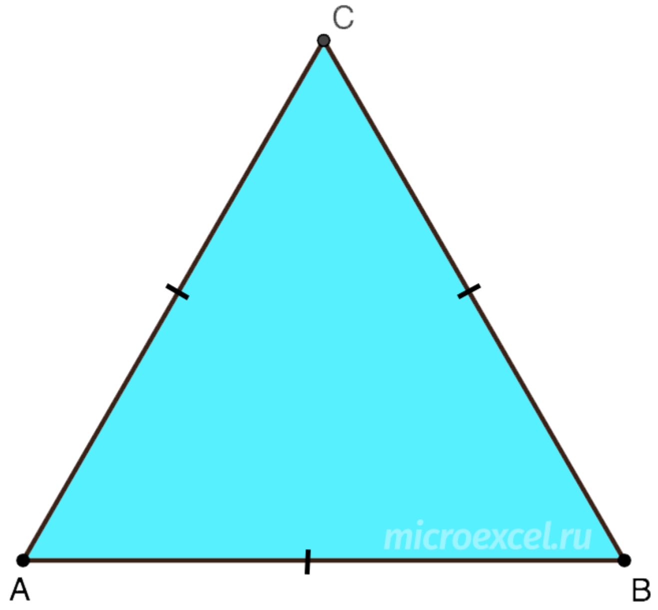
6) $\angle ADB + \angle BDC = \angle A + \angle ABD + \angle C + \angle DBC =$
$= 2(\angle ABD + \angle DBC) = 180^\circ$

7) $\angle ABD + \angle DBC = \angle B = 180^\circ$, чтд

—//—

3.6.Правильный треугольник

Равносторонним (или правильным) называется треугольник, в котором все стороны имеют одинаковую длину. Т.е. $AB = BC = AC$.

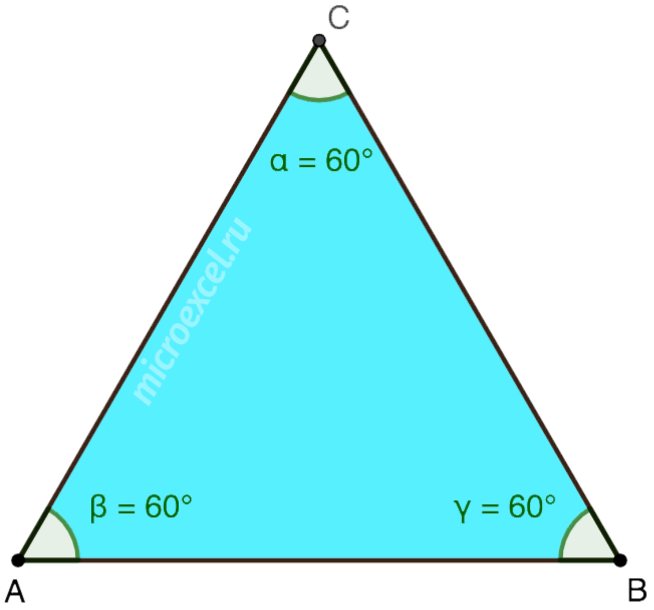


Примечание: правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, имеющий равные стороны и углы между ними.

Свойства равностороннего треугольника

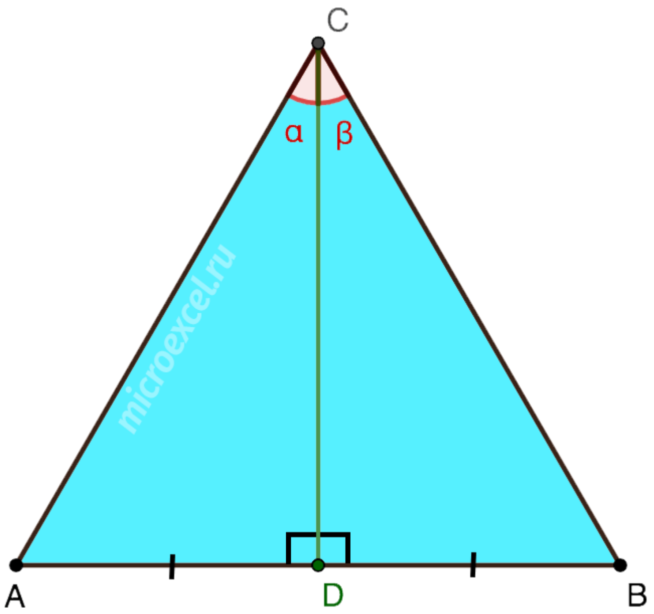
Свойство 1

В равностороннем треугольнике все углы равны 60°. Т.е. $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.



Свойство 2

В равностороннем треугольнике высота, проведенная к любой из сторон, одновременно является биссектрисой угла, из которого она проведена, а также медианой и серединным перпендикуляром.

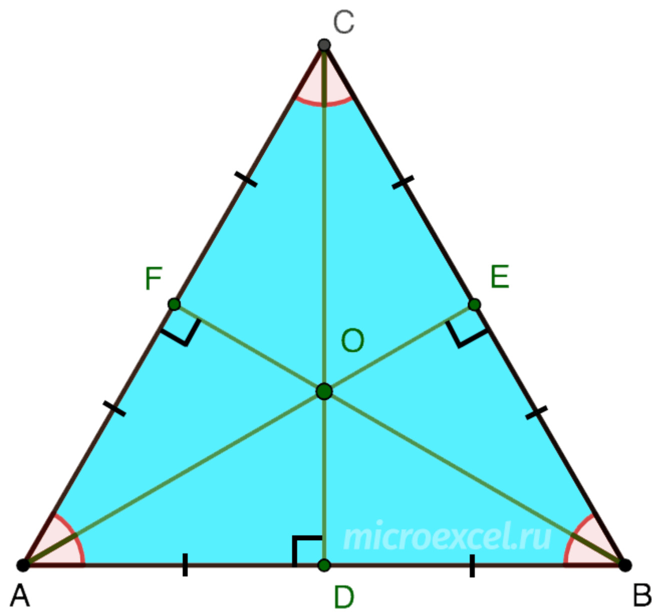


CD – медиана, высота и серединный перпендикуляр к стороне AB, а также биссектриса угла ACB.

- CD перпендикулярна AB => $\angle ADC = \angle BDC = 90°$
- $AD = DB$
- $\angle ACD = \angle DCB = 30°$

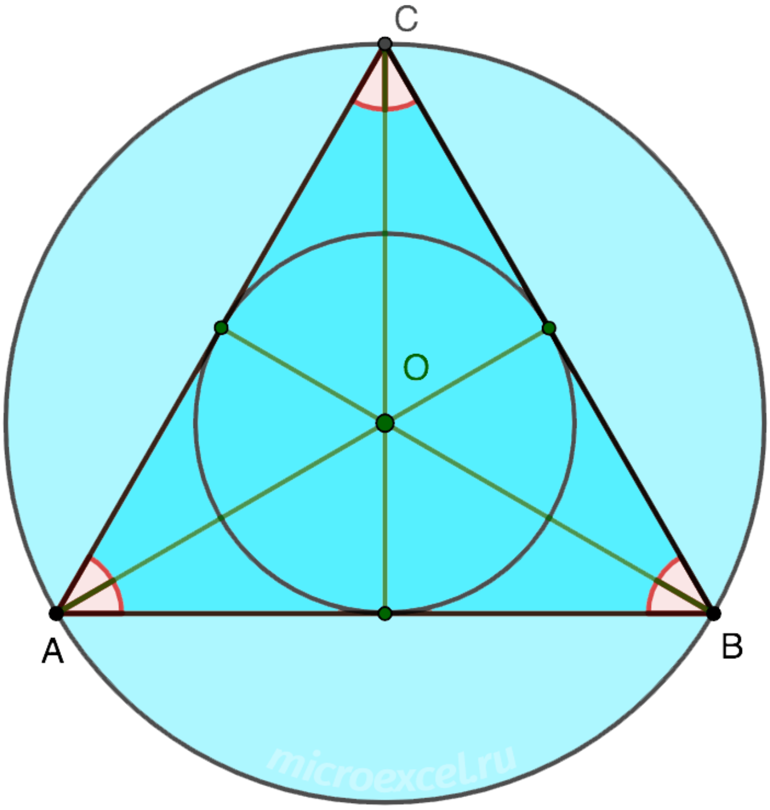
Свойство 3

В равностороннем треугольнике биссектрисы, медианы, высоты и серединные перпендикуляры, проведенные ко всем сторонам, пересекаются в одной точке.



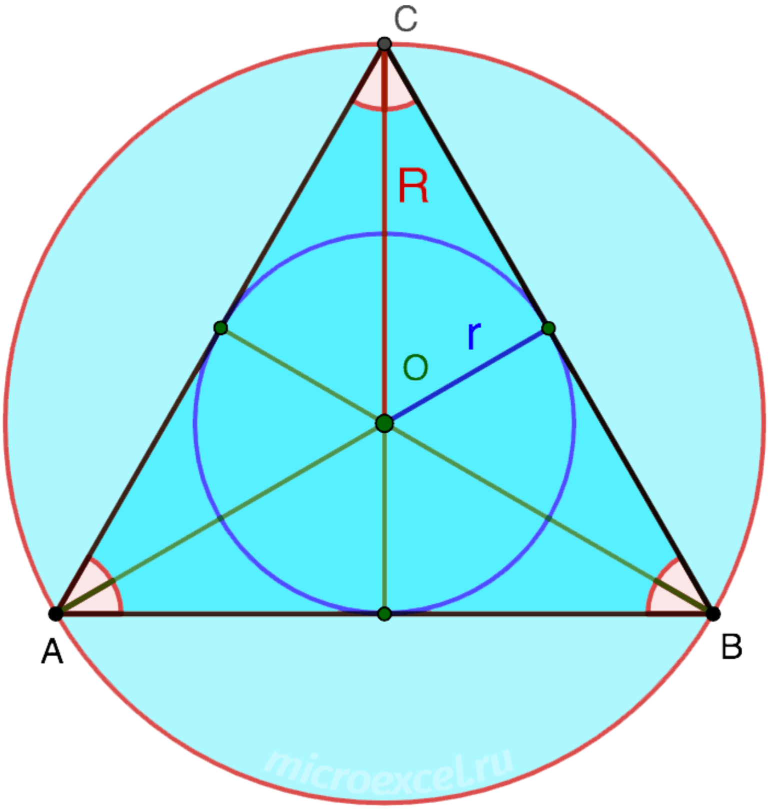
Свойство 4

Центры вписанной и описанной вокруг равностороннего треугольника окружностей совпадают и находятся на пересечении медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров.



Свойство 5

Радиус описанной вокруг равностороннего треугольника окружности в 2 раза больше радиуса вписанной окружности.



- R – радиус описанной окружности;
- r – радиус вписанной окружности;
- $R = 2r$.

Свойство 6

В равностороннем треугольнике, зная длину стороны (условно примем ее за “*a*”), можно вычислить:

1. Высоту/медиану/биссектрису: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
2. Радиус вписанной окружности: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
3. Радиус описанной окружности: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

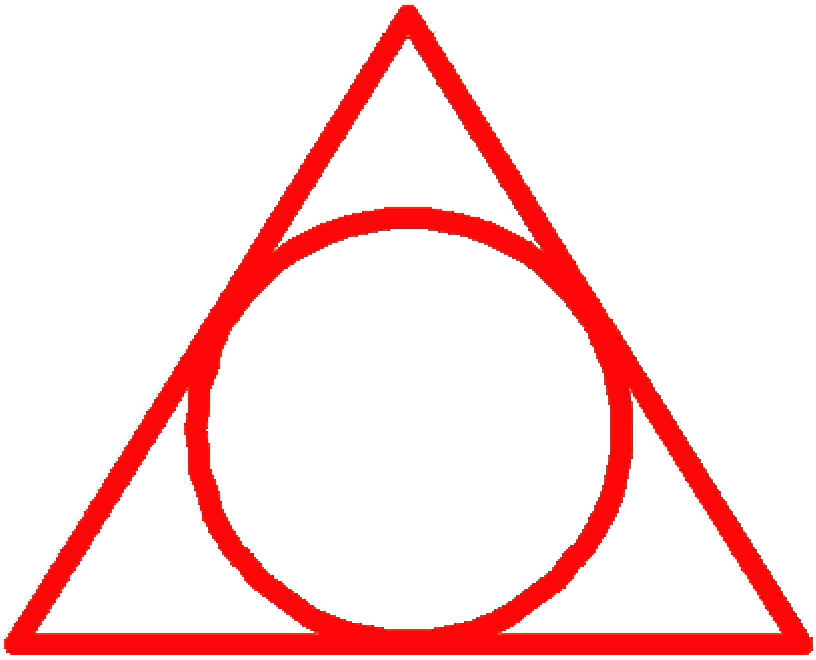
4. Периметр: $P = 3a$

5. Площадь: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

4. Треугольник в повседневной жизни

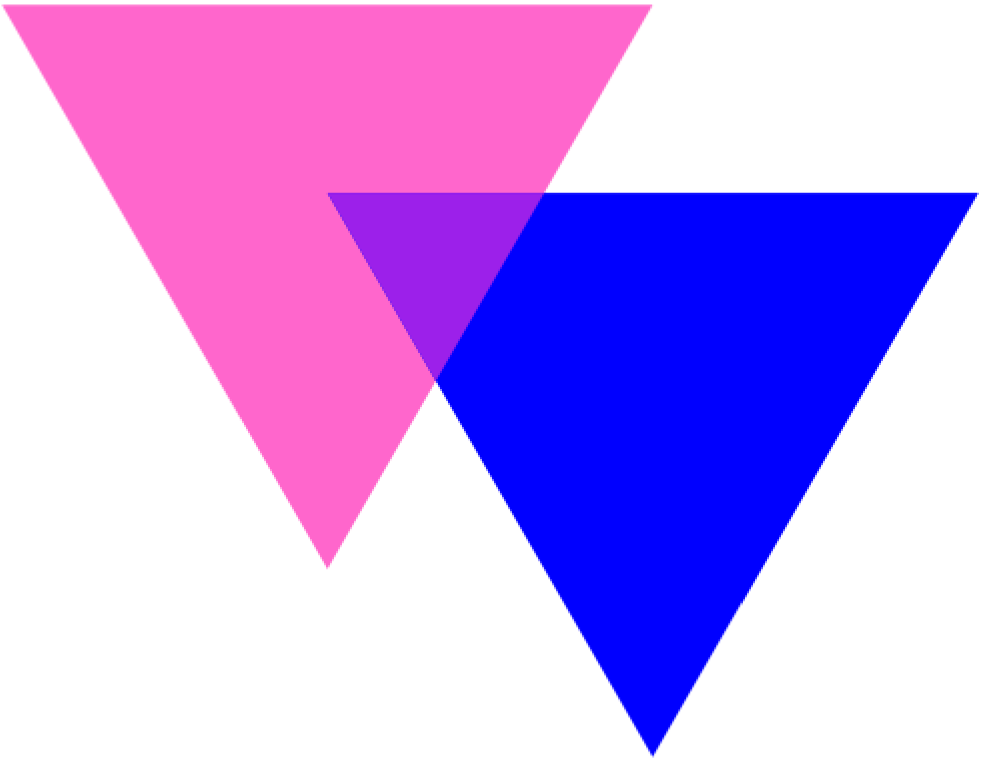
Часто треугольники встречаются в символах: Треугольник - универсальная геометрическая фигура, чья символическая трактовка определяется типом, видом расположения или комбинацией треугольников. Наиболее отчетливой символикой обладает только один тип этой плоскостной фигуры - равносторонний треугольник. Его значения, связанные с целым рядом ассоциацией, напрямую зависят от того, куда направлена вершина треугольника. Равносторонний треугольник с вершиной, направленной вверх, олицетворяет божественное совершенство и гармонию, служит знаком солнца и огня, жизни и сердца, горы и духовного подъема. Треугольник, перевернутый вершиной вниз, является знаком Луны, воды и дождя. Два таких треугольника, соприкасающиеся вершинами, символизируют цикличность, растущую и убывающую Луну, начало и конец, жизнь и смерть. В точке их соприкосновения происходит коренная трансформация, одно явление переходит в противоположное. Наконец, два пересекающихся равносторонних треугольника, образующих гексаграмму (шестиконечную звезду, именуемую в оккультизме "щитом Давида" или "печатью Соломона"), знаменуют единство противоположностей. Символика равностороннего треугольника теснейшим образом связана с человеком.

Равносторонний треугольник символизирует «Завершение». Треугольник в круге означает мир форм, заключенный в круге вечности.



В философии пифагорейцев геометрическая фигура с тремя углами была символом числа "3" и эмблемой мудрости, по праву принадлежащей богине Афине. Любопытное истолкование получили разные виды треугольников в учении Ксенократа из Калхидона (ок. 395 - 312 гг. до н. э.). Руководитель Афинской платоновской академии называл равносторонний треугольник "божественным", равнобедренный - "демоническим", а разносторонний - "человеческим". В первом из них, по мнению Ксенократа, воплотились божественная гармония и совершенство; во втором - скрытая ущербность при кажущейся правильности; что же до третьего, то его неправильная форма прозрачно намекает на несовершенство человека.

Два смыкающихся треугольника - союз противоположностей, которые становятся жидким огнем или огненной водой.



Существует магическое слово в виде треугольника «Абракадабра». Оно выписывалось столбиком на дощечке 11 раз, при этом последняя буква каждый раз отсекалась. Получался треугольник. Такое постепенное укорачивание этого слова должно было уничтожать силу злого духа, и больной, надевая амулет, должен был постепенно выздоравливать.

A B R A C A D A B R A
A B R A C A D A B R
A B R A C A D A B
A B R A C A D A
A B R A C A D
A B R A C A
A B R A C
A B R A
A B R
A B
A

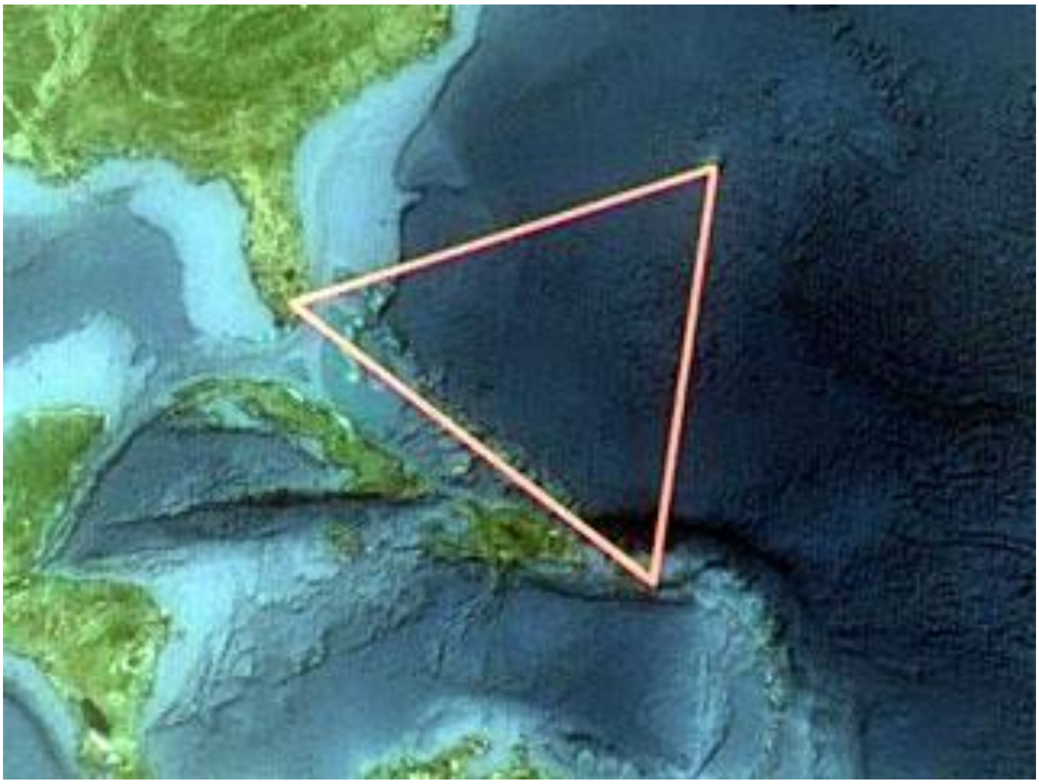
Египетские пирамиды тоже в форме треугольника. Пирамида имеет квадрат в плане и треугольник в вертикальном сечении, квадрат соответствует кресту, образованному четырьмя кардинальными точками.

Песочные часы часто появляются в изображении благочестивого, тихого образа жизни, для иллюстрации краткости человеческого бытия, как атрибут Отца-Времени и иногда Смерти. Они разделяют символизм двух треугольников, один из которых перевернут, что означает циклы созидания и разрушения.

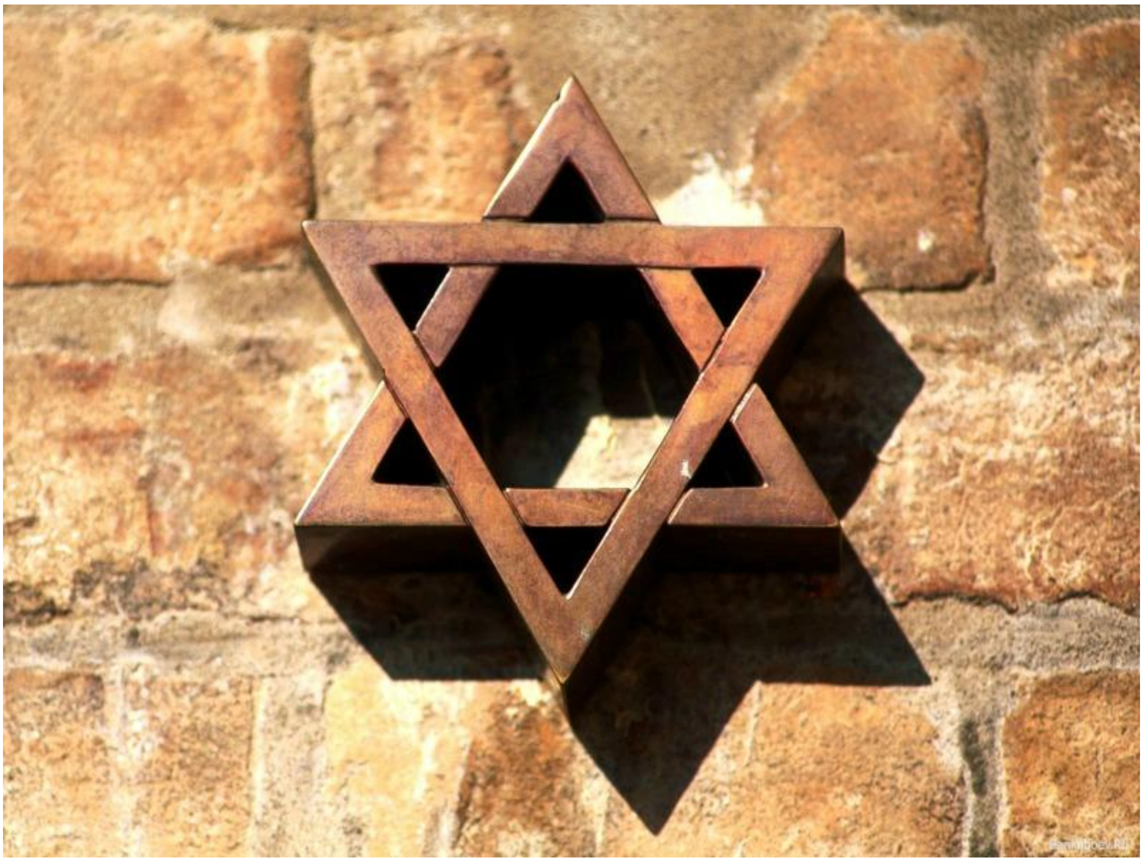
Треугольники многое значат. Например, равносторонний треугольник свидетельствует об упрямстве, несговорчивости и методичности

Неравнобедренные треугольники - структурное подразделение некой организации.

В Атлантическом океане есть район, в котором якобы происходят таинственные исчезновения морских и воздушных судов - бермудский треугольник. Район является очень сложным для навигации: здесь большое количество отмелей, часто зарождаются циклоны и штормы. Люди выдвигают различные гипотезы для их объяснения: от необычных погодных явлений до похищений инопланетянами или жителями Атлантиды. Сторонники теории упоминают об исчезновении примерно 100 крупных морских и воздушных судов за последние сто лет. Кроме исчезновений, сообщается об исправных судах, брошенных экипажем, и о других необычных явлениях, таких как мгновенные перемещения в пространстве, аномалии со временем и т. п. Лоуренс Куше и другие исследователи показали, что некоторые из этих случаев произошли за пределами Бермудского треугольника. О некоторых происшествиях вообще не удалось найти никакой информации в официальных источниках.

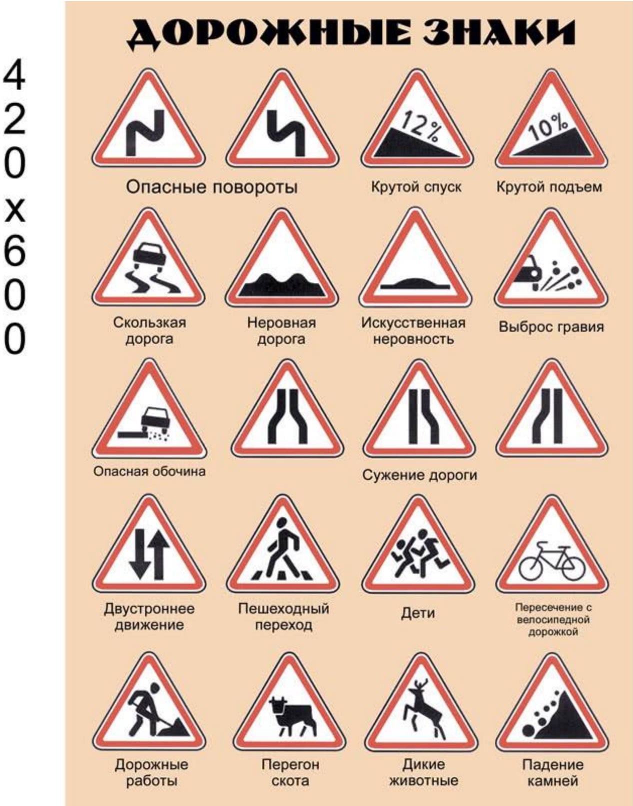


Звезда Давида - древний символ, эмблема в форме шестиконечной звезды, в которой два одинаковых равносторонних треугольника наложены друг на друга, образуя структуру из шести одинаковых равносторонних треугольников, присоединённых к сторонам правильного шестиугольника. С XIX века Звезда Давида считается еврейским символом. Звезда Давида изображена на флаге Государства Израиль и является одним из основных его символов. Шестиконечные звёзды также встречаются в символике других государств и населённых пунктов.



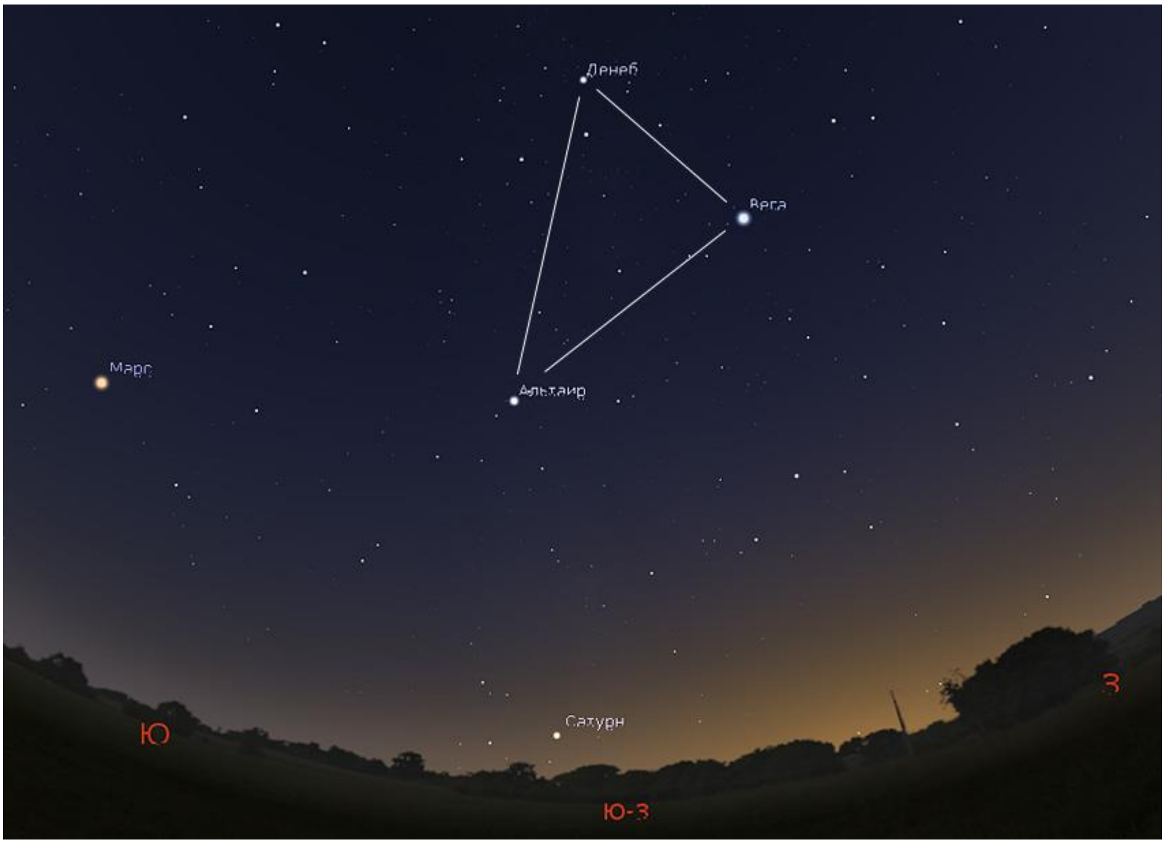
"Глаз в треугольнике" (или «Всевидящее око», или «сияющая дельта») считается символом Бога. Происхождение свое он ведет с глубокой древности. Возможно, традиция изображать подобным образом божество берет свое начало еще в Древнем Египте. В этом государстве часто использовался религиозный знак "соколиное око Гора". В Древней Индии существовал похожий символ - "третий глаз Шивы".

Знаки дорожного движения тоже состоят из треугольников.



Прошло то военное время, когда умение складывать письма по-солдатски треугольником было актуальным. Даже дети дошкольного возраста, играя «в комиссаров и фашистов», складывали листы газетной бумаги наподобие такого письма и «отправляли» его на фронт отцам. В годы чеченских войн наши бойцы иногда вынужденно прибегали к тому же способу складывания писем солдатским треугольником.

Треугольник - созвездие северного полушария неба. С одержит 25 звёзд, видимых невооружённым глазом.



Треугольник - ударный музыкальный инструмент в виде металлического прута (обычно из стали или алюминия), изогнутого в форме треугольника. Один из углов оставлен открытым (концы прута почти касаются).

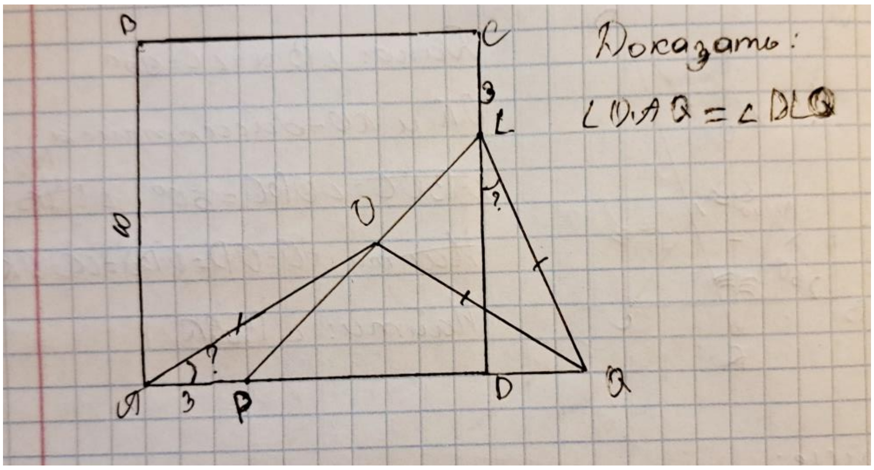
5. Геометрические задачи

На олимпиаде п математике, мне захотелось побыть тем самым профессором, который придумывает детям олимпиадные задачи. Поэтому я решил реализовать мою задумку в жизнь.

Целью моей работы было создание геометрических задач на основе треугольников и их свойств. В своём проекте я решил реализовать три задачи. В этих задачах будут использоваться основные свойства треугольников: Равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по трём сторонам, внешний угол, свойства равнобедренного треугольника и свойства биссектрисы, медианы и высоты равнобедренного треугольника, опущенных к основанию.

<u>Задача №1</u>

Условие задачи представлено на рисунке:



Решение:

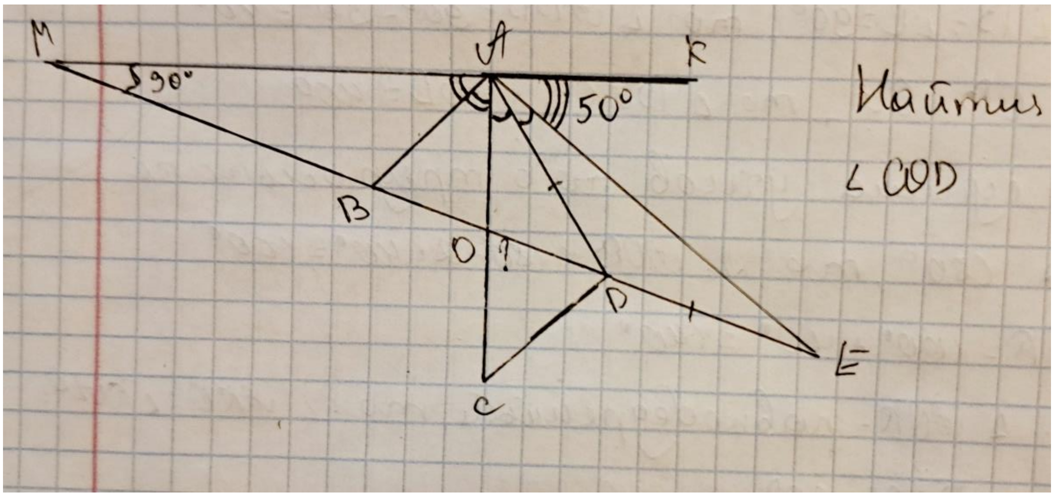
1) Рассмотрим треугольник PLD, в нём PD=LD, т.к. PD=AD-3, LD=CD-3, AD=CD, т.к. ABCD – квадрат.
2) Т.к. ABCD – квадрат, то угол PDL=90^o, то углы при основании по 45^o.
3) Угол LOQ – внешний угол, то угол LOQ=45^o+ угол OQP
4) Т.к. OQ=QL, то треугольник LOQ – равнобедренный, то угол LOQ= углу OLQ, то угол OLQ=45^o+ угол OQA

5) Т.к. AO=OQ, то треугольник AOQ – равнобедренный, то угол OAQ= углу AQO.
6) Т.к. угол OLQ=45^o+ угол OQP, угол OAQ= углу AQO, то угол DLQ= угол OLQ – угол DLP, DLQ= угол OLQ – 45^o, то DLQ=AQO.
7) Т.к. треугольник AOQ – равнобедренный, то DLQ=OAQ.

Ответ: доказано.

Задача №2

Условие задачи представлено на рисунке:



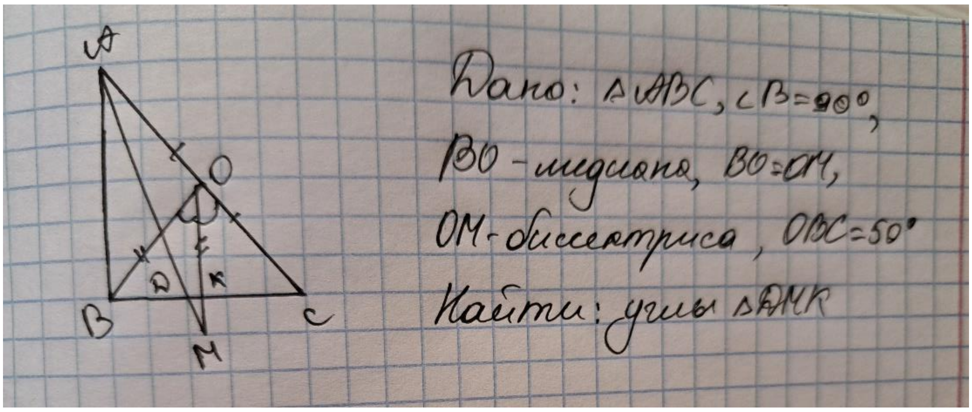
Решение:

1) Угол KAE – внешний, то угол AEM=50^o-30^o=20^o.
2) Т.к. AD=DE, то треугольник ADE – равнобедренный, то угол DEA= углу DAE=20^o.
3) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то угол ADE=180^o-20^o-20^o=140^o.
4) Углы MDA и ADE – смежные, то угол MDA=180^o-угол ADE, угол MOA=180^o-140^o=40^o.
5) Т.к. AO – биссектриса угла DAE, то угол OAD= углу DEA=20^o.
6) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то угол AOD= 180^o-20^o-40^o=120^o.
7) Т.к. углы AOD и DOC – смежные, то угол COD=180^o-120^o=60^o.

Ответ: угол COD=60^o.

Задача №3

Условие задачи представлено на рисунке:



Решение:

1) Т.к. угол ABC=90^o, то угол ABO=90^o-50^o=40^o.
2) Т.к. AO=BO=CO(по свойству медианы), то треугольник AOB – равнобедренный, то OAB=ABO=$40^{o.}$
3) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то угол AOB=180^o-40^o-40^o= =100^o.
4) Т.к. треугольник BOC- равнобедренный, то угол OBC= углу OCB=50^o.
5) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то угол BOC=180^o-50^o-50^o=80^o.
6) Т.к. OM – биссектриса угла BOC, то угол BOM=1/2BOC=40^o.
7) Угол AOM=AOB+BOM=100^o+40^o=140^o.
8) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то AMO=(180-140)/2=20^o
9) Т.к. биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из угла к снованию равна и высоте, и медиане, то BKM=180-90=90^o
10) Т.к. сумма углов в треугольнике равна 180^o, то KDM=180-90-20=70^o

Ответ: KDM=70^o, BKM=90^o, AMO=20^o

6.Вывод

Треугольник – очень интересная фигура, которая используется не только в геометрии, но и в быту. Существует огромное количество приспособлений в форме треугольника. Разные математические загадки связаны с треугольниками. Ещё с древних пор, люди начали использование треугольников в быту. Треугольники дошли и до наших дней. Такой музыкальный инструмент, как треугольник имеет отличный звук, крыши домов делают в виде треугольников, потому что осадки не будут скапливаться и будут стекать с крыши. Оптическая иллюзия треугольник Пенроузена – это величайшее открытие, хоть и большого смысла не имеющие. Треугольники окружают нас везде.

В своей работе я хотел познакомиться по ближе с такой удивительной фигурой – треугольник. За время работы над проектом я узнал, что треугольники есть везде, что с треугольниками связано много открытий. В своём проекте я выполнил 4 задачи:

1) Познакомился с треугольниками
2) Узнал разновидности треугольников
3) Узнал новых учёных, работающих над треугольниками
4) Создал три задачи на тему треугольник

7.Список литературы

- https://infourok.ru/
- https://www.1urok.ru/categories/9/articles/25744
- https://obrazovanie-gid.ru/soobscheniya/soobschenie-treugolnik-v-nashej-zhizni-dlya-5-klassa.html
- https://hischool.jofo.me/1894308.html
- https://studfile.net/preview/7346319/page:3/
- https://for-teacher.ru/edu/matematika/doc-mf7kv8h.html
- https://microexcel.ru/svoystva-ravnostoronnego-treugolnika/
- http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/32bf945a-f114-11db-9d47-ad329ab038b1/problem_107709.html
- https://100urokov.ru/predmety/urok-6-pryamougolnyj-treugolnik
- Фарков А.В. «Математические олимпиады в школе 5-11 классы/А.В.Фраков - 10-е изд. – М.:Айрис-пресс, 2011. – 296 с.: ил. – (Школьные олимпиады)