

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
«Школа № 115»

**Исследовательская работа по математике на тему:**  
**«Флексагон»**

Выполнил:  
ученик 6 «Б» класса  
Исаев Матвей  
Руководитель:  
учитель математики  
Гусева Марина Николаевна

г. Нижний Новгород

2024 год

<b>Оглавление</b>	
<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Глава I.....</b>	<b>6</b>
<b>Исследовательская часть.....</b>	<b>6</b>
<b>1.1. История создания.....</b>	<b>6</b>
<b>1.2. Виды флексагонов.....</b>	<b>8</b>
<b>1.3. Плоские сгибаемые многоугольники.....</b>	<b>9</b>
<b>1.4. Объёмные сгибаемые многогранники .....</b>	<b>10</b>
<b>Глава II. ....</b>	<b>13</b>
<b>Исследование флексагонов.....</b>	<b>13</b>
<b>2.1. Свойства флексагонов.....</b>	<b>13</b>
<b>2.2. Применение флексагонов.....</b>	<b>15</b>
<b>Заключение .....</b>	<b>20</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>22</b>
<b>Приложения .....</b>	<b>23</b>

## Введение

Математика – предмет очень сложный и очень важный. Большинство ребят при изучении математики испытывают затруднения. Многие школьники считают ее скучной и неинтересной.

Занимательная математика интересна всем. Её делает интересной элемент игры, который может быть представлен в виде головоломки, ребуса, шарады, фокуса, парадокса. Сталкиваясь с нестандартными математическими задачами, учащиеся испытывают вдохновение от приобщения к творческому мышлению, ощущают величие и красоту математики. Нестандартные задачи развивают наблюдательность, умение логически мыслить, пробуждают веру в свои силы.

К исследовательской работе меня вдохновил интерес к головоломкам. Услышав от учителя термин «флексагон», у меня появилось желание узнать, что же это такое.

Мне хочется доказать, что математика — это не сухая наука, которая состоит из цифр, формул и скучных задач, а это достаточно интересный и занимательный предмет, где есть место творчеству.

Испытывая интерес к занимательной математике, мне захотелось познакомиться с загадочными, увлекательными и имеющими практическое применение математическими объектами, которые не рассматриваются на уроках математики. Мое внимание уже привлекли флексагоны, им я и посвятил свою исследовательскую работу.

Флексагоны способствуют не только развитию пространственного воображения и имеют практическое применение, жаль, что оно не нашло широкого распространения. Может показаться, что это всего лишь игрушки, но флексагоны таят в себе много загадок и не все свойства еще изучены.

### **Актуальность выбранной темы:**

Флексагоны и им подобные фигуры (обладающие удивительной способностью изгибаться, показывая новые грани) – всего лишь игрушки на

первый взгляд, но они сумели привлечь внимание в различных отраслях.

Например:

Во всех тетрафлексагонах присутствует шарнир двойного действия, который повсеместно используется в раскладных телефонах, для петель дверей и окон, в креплениях на настенные телевизоры и т.д.

В рекламных акциях широко используют необычные циклы изгибания фигур, они привлекают к ним внимание. Кроме того, к любому флексагону можно прикрепить плоский предмет (на который хотят обратить внимание), и можно с уверенностью сказать, что этим предметом заинтересуются (что широко используется в маркетинге).

Флексагоны связаны с различными науками и вещами: в форме флексагонов закручены молекулы веществ, в стиле флексагонов создаются предметы мебелировки, интерьеры помещений.

Флексагоноподобные фигуры используются как самодельные открытки, игрушки (массовое производство не налажено). Они служат темами научных и ненаучных дискуссий, но до конца они так и не раскрыты.

Благодаря самостоятельному изготовлению моделей флексагонов и флексоров мне удалось лучше понять и изучить их занимательный мир, что помогло добиться поставленной цели.

**Цель:** изучение интересного мира флексагонов, создание мною собственных моделей.

**Задачи:**

- ✓ изучить историю открытия флексагонов;
- ✓ ознакомиться с процессом их изготовления;
- ✓ изготовить некоторые виды флексагонов;
- ✓ изучить свойства флексагонов;
- ✓ выяснить применение флексагонов в жизни
- ✓ пробудить интерес одноклассников к математике, продемонстрировав, что точная наука математика может быть занимательной, необычной и удивительной.

**Методы исследования:** анализ литературы, сбор информации, классификация, сравнение, наблюдение, создание наглядных моделей и обобщение материала.

## Глава I

### Исследовательская часть

**Флексагон** – это математическая головоломка, увлекательная, забавная игрушка, обладающая удивительными свойствами.

Флексагоны – это многоугольники, сложенные из полосок бумаги прямоугольной или более сложной, изогнутой формы, которые обладают удивительным свойством: при перегибании флексагонов их наружные поверхности прячутся внутрь, а ранее скрытые поверхности неожиданно выходят наружу. Происходит это слово от английского *to flex*, что означает «складываться, гнуться». Если бы не одно случайное обстоятельство – различие в формате английских и американских блокнотов, – флексагоны, возможно, не были бы открыты и по сей день и многие выдающиеся математики лишились бы удовольствия изучать их замысловатую структуру.

#### 1.1. История создания

Флексагоны были открыты случайно, что происходит со многими удивительными вещами. Открыть флексагоны помогло различие в формате английских и американских блокнотов. Американский лист короче привычного международного формата А4 на 18 мм. Эта разница помогла в первой половине XX века открыть флексагон увлекательную игрушку, головоломку и интересную математическую модель. Если бы не она, мы бы не до сих пор не знали о флексагонах.

Артур Х. Стоун, молодой аспирант из Англии, изучавший математику в Принстонском университете (США), в конце 1939 года обрезая листы американского блокнота, решил немного развлечься.



Из отрезанных полосок бумаги он складывал фигурки. Одна из сделанных им фигур оказалась очень интересной. Перегнув полоску бумаги в трёх местах и соединив концы, он получил правильный шестиугольник. Взяв этот шестиугольник за два смежных треугольника, Стоун подогнул противоположный угол вниз так, что его вершина совпала с центром фигуры. Стоун обратил внимание на то, что, когда шестиугольник раскрывался, видимой становилась совсем другая поверхность.

Если бы обе стороны исходного шестиугольника были разного цвета, то после перегибания видимая поверхность изменила бы свою окраску. Так был открыт самый первый флексагон с тремя поверхностями. Стоун решил, что можно построить и более сложный шестиугольник с шестью поверхностями вместо трёх.

Одна из сделанных Стоуном фигур – правильный шестиугольник – оказалась достаточно занимательной, она имела три поверхности из которых были видны только две. Перегнув же шестиугольник определённым образом, можно было увидеть и третью сторону. Позже его назвали тригексафлексагоном («три» – число поверхностей, «гекса» – число углов).

В 1940 году Тьюки и Фейнманом была разработана полная математическая теория флексагонов. Она указывает точный способ построения флексагонов с любым числом сторон, причём именно той разновидности, которая требуется. Тетрафлексагоны были открыты, на несколько столетий раньше гексафлексагонов, но они гораздо менее изучены. Артур Х. Стоун с друзьями посвятили много времени складыванию этих четырёхсторонних разновидностей

флексагонов, но им так и не удалось построить полную теорию, охватывающую все разновидности этих головоломок.

## 1. 2. Виды флексагонов

Исследуя флексагоны я столкнулся с огромным количеством их видов, с длинными и пугающими названиями, но всё оказалось очень просто.

**Есть всего три вида флексагонов:**

- **тетрафлексагоны** (тритетрафлексагон, гексатетрафлексагон, тетратетрафлексагон)



- **гексафлексагоны** (унагексафлексагон, дуогексафлексагон, тригексафлексагон, тетрагексафлексагон, пентагексафлексагон, гексагексафлексагон, гептагексафлексагон)



- **флексотрубка**

Поверхности флексагона могут состоять из треугольников, квадратов, пятиугольников и т.д. Флексагон заданной формы с заданным количеством плоскостей может быть изготовлен из разных развёрток. Даже одна и та же развёртка может допускать разные варианты сворачивания. Для флексагонов нет общепринятой системы наименований.



Название флексагона содержит впереди числительное, показывающее, сколько плоскостей имеет этот флексагон, на втором месте — числительное, определяющее форму флексагона, и в заключение — известное уже слово, обозначающее, что всё это гнётся и складывается.

Примеры приставок, образуемых из корней греческих числительных, применяемых для обозначений: 1 – моно-, 2 – ди- или би-, 3 – три-, 4 – тетра-, 5 – пента-, 6 – гекса-, 7 – гепта-, 8 – окта- и т. д.

### 1. 3. Плоские сгибаемые многоугольники

#### Тетрафлексагоны

Самый простой тетрафлексагон (флексагон с квадратными поверхностями) – тритетрафлексагон, имеющий три поверхности. Всегда видимыми являются две из трёх поверхностей. Более сложные – гексатетрафлексагон и декатетрафлексагон – собираются из крестообразной развёртки без использования клея. Тетрафлексагоны с числом плоскостей  $4n + 2$  также можно изготавливать из квадратных рамок. Из зигзагообразных полосок бумаги можно изготовить тетратетрафлексагон и другие тетрафлексагоны с числом плоскостей, кратным 4.



#### Гексафлексагоны

Гексафлексагон – это флексагон, имеющий форму шестиугольника, где каждая поверхность флексагона состоит из шести треугольных частей.

Существует множество гексафлексагонов, различающихся по числу поверхностей. Есть гексафлексагоны с тремя, четырьмя, пятью, шестью, семью,

девятью, двенадцатью, пятнадцатью, сорока восемью плоскостями; количество плоскостей ограничено тем, что бумага имеет некоторую толщину.

## 1. 4. Объёмные сгибаемые многогранники

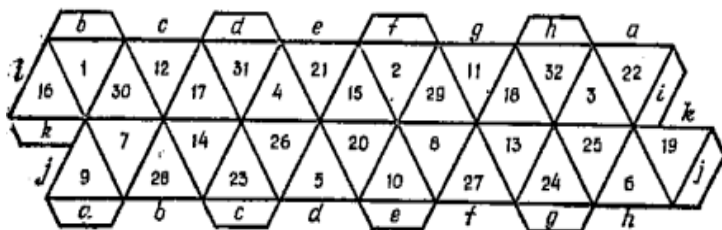
### Кольцевые флексагоны

Кольцевой флексагон (**флексор**) – изгибаемый многогранник, собранный из «кольца» многоугольников, которые являются флексагонами.

Для названия кольцевых флексагонов может быть использована приставка «цирко», например, тригемициркогексафлексагон – флексагон с тремя поверхностями, каждая из которых представляет собой кольцо (цирко) из половинок (геми) правильных шестиугольников (гекса), пентациркодекафлексагон – кольцевой флексагон с пятью плоскостями, состоящими из десяти многоугольников (пятиугольников) каждая.



Флексоры выглядят привлекательнее, чем флексагоны, но математический интерес вызывает только кольцо из 8 тетраэдров, которое еще называют магическим. Математик Ройал В. Хит на заготовке для кольца из 8 тетраэдров расставил числа от 1 до 32 таким образом:



По этой заготовке можно изготовить флексор, который состоит из восьми тетраэдров. Вращая флексор, получаем четыре различные комбинации чисел с одним и тем же результатом:

1)  $28+22+3+13+27+21+4+14=132$ ; 2)  $1+16+25+24+2+15+26+23=132$



3)  $19+6+11+29+20+5+12+30=132$ ; 4)  $7+9+32+18+8+10+31+17=132$

Числа расположены так, что четыре грани каждого тетраэдра в сумме дают 66.

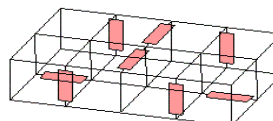
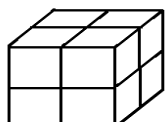
### Объёмный тетрафлексгон

Объёмный тетрафлексгон, был создан при объединении принципов тетрафлексгонов и флексоров.

Многогранник будет изгибаться, если выбрать тела одинаковые со всех сторон. Из всех правильных многогранников удобнее всего взаимно прикреплять друг к другу кубы.



Шарниры для циклического проворачивания нужно расположить так, чтобы по окончании полного цикла поворота фигура могла начать этот цикл сначала, а не только повторять его в обратном порядке. Можно по-разному расположить 8 кубов симметрично центра всей фигуры:



Клапаны лучше расположить так, чтобы эти два вида были этапом цикла изгибаний. Этого можно добиться, расположив клапаны симметрично так, чтобы были соединены боковые, верхние и нижние кубы.

### **Флексотрубка**

**Флексотрубка** — замечательную головоломку Стоун случайно открыл, работая над флексагонами, имеющими форму прямоугольного треугольника. Стоун обнаружил, что, построив плоский флексагон в форме квадрата может превратить его в трубку. Дальнейшие эксперименты показали, что трубку можно полностью вывернуть наизнанку, если воспользоваться сложной системой сгибов по сторонам прямоугольных треугольников.



## Глава II.

### Исследование флексагонов

#### 2.1. Свойства флексагонов

Давайте попробуем разобраться в схемах и инструкциях сборки флексагонов. На это у меня ушло много бумаги, времени, терпения и сил. Получалось не все. Инструкции непонятные, размеры неправильные. Пришлось серьёзно потрудиться, каждая ошибка и работу приходилось начинать заново.

В готовой фигуре нужно научиться раскрывать все её поверхности. Чтобы гексафлексагон открылся, его нужно одной рукой взять за два соседних треугольника, примыкающих к какой-нибудь вершине фигуры, а другой рукой потянуть за свободный край двух противоположных треугольников. Флексагон выворачивается наизнанку при открывании, и наружу выходит поверхность, которая ранее скрывалась внутри.



В моделях с 3-мя, 4-мя, 5-ю поверхностями отыскать каждую поверхность не трудно, но начиная с гексагексафлексагона, появляются трудности. Флексагон можно было вращать до бесконечности, но увидеть пятую, шестую и последующие поверхности не удавалось. Разобраться с этой проблемой помогла схема, разработанная Таккерманом для гексагексафлексагона. Им был найден простейший способ выявления всех поверхностей любого флексагона: держа флексагон за какой-нибудь угол, следует открывать фигуру до тех пор, пока она открывается, а затем переходить к следующему углу. Данный метод

называется «**путь Таккермана**». Этот метод позволяет увидеть все шесть разворотов гексагексафлексагона за один цикл из 12 сгибаний.

Нужно разобраться что такое флексагон? Игрушка, оригами или математическая головоломка?

**Игрушка** - предмет, предназначенный для игры. Игрушка служит целям умственного, нравственного, эстетического и физического воспитания, воссоздавая реальные и воображаемые предметы, образы.

Игрушка помогает познавать окружающий мир, способствует развитию мышления, памяти, речи, эмоций, приучает к целенаправленной деятельности. Игрушка широко используется в учебно-воспитательной работе для развития технического и художественного творчества.

**Головоломка** - непростая задача, для решения которой, как правило, требуется сообразительность, а не специальные знания высокого уровня.

**Оригами** (яп. 折り紙, буквально «сложенная бумага») - вид декоративно-прикладного искусства; древнее искусство складывания фигурок из бумаги.



Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, давайте окунуться в искусство оригами. Фигурка оригами как и флексогон требует внимательного складывания листа бумаги по инструкции, но на этом процесс творчества заканчивается. Оригами-трансформеры очень близки к флексагонам, они, перегибаясь, неожиданно создают новый вид, новую фигуру, но и здесь полёт фантазии заканчивается.



Прочитав литературу по теме, изучив природу флексагонов и флексоров, изготовив их, можно сделать вывод: в основе флексагонов и флексоров лежит геометрия. Флексагоны и флексоры нельзя воспринимать как обычное оригами. Это выходит за рамки привычного для нас бумагоскладывания и является геометрией. Этим вопросом занимались несколько известных математиков, поэтому флексагоны и флексоры – это, с одной стороны, занимательная математика, а с другой, доказательство того, что существуют многогранники, обладающие способностью изгибаться и ломаться.

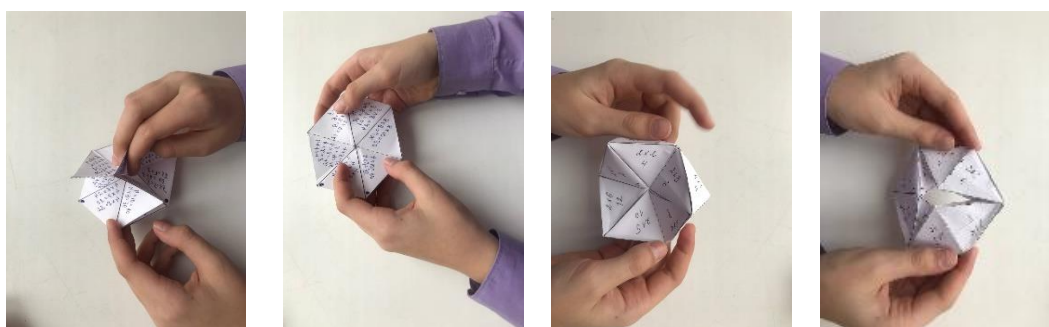
Анализируя всё, что мы узнали про флексагоны, можно сделать вывод, что это всё-таки занимательная геометрическая головоломка.

## 2.2. Применение флексагонов

Флексагоны и флексоры применяются как средство математического развития школьников. Флексагоны способствуют развитию мелкой моторики, пространственному воображению, памяти, вниманию, терпению и многому другому. Занимательно складывать флексагоны, выворачивать их, наблюдать, как они меняют форму и поворачиваются разными комбинациями сторон.

Флексагоны и флексоры можно применять на уроках математики, если на их сторонах написать числа и знаки «+», «-», «×», «:». Выворачивая флексагон, можно числа складывать, вычитать, умножать и делить.

Флексагоны можно применить в качестве шпаргалки, написав на его сторонах формулы или правила, можно выворачивая флексагон обычными сторонами наружу посмотреть, что там написано.



Если каждый треугольник гексафлексагона раскрасить в свой цвет, то можно применять его для изучения цветов у детей. На каждом треугольнике можно поместить не только цвета, но и геометрические фигуры, рисунки животных, деревьев, цветов и др. Флексагон может стать не только забавной игрушкой, которую можно выворачивать, но и наглядным обучающим материалом.

Флексагоны и флексоры можно подарить друзьям в качестве сувенира или во время проведения праздника научить их делать эти геометрические игрушки.

Флексоры и простейшие флексагоны, раскрашенные в разные цвета или сделанные из фольги, можно использовать в качестве ёлочных украшений или для обычного оформления праздника.



Флексагоноподобные фигуры используются как самодельные открытки, игрушки.





Тетратетрафлексгон можно часто встретить в роли головоломки или рекламного буклета. Это связано с его особым свойством: одну из поверхностей отыскать гораздо сложнее, чем три других.

Большое применение объёмный многогранник может найти в дизайнерском искусстве, так как цикл перегибаний интересен при создании мебели – трансформера: диванов, кресел, стульев и других предметов. В стиле флексагонов создаются интерьеры помещений и их декор.



В форме флексагонов закручены молекулы веществ.

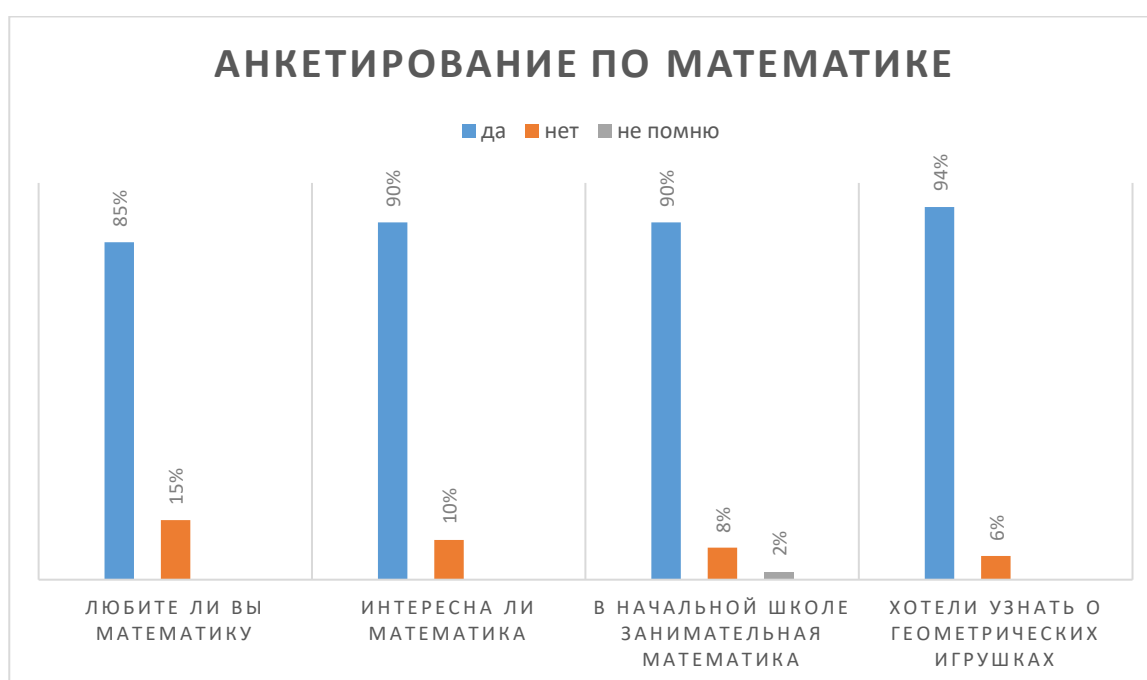


Шарнир двойного действия, соединение которого присутствует на всех тетрафлексгонах, повсеместно используется для петель дверей и окон, в креплениях на настенные телевизоры, в раскладных телефонах



**Совместно с учителем мною было проведено анкетирование учащихся по вопросам математики и вот что я выяснил:**

Анкета (Приложение 1)



### **Анализ собранных анкет**

На вопрос «Любите ли вы уроки математики?» ответ «да» дали 85%. Занимательная математика интересна 90 % школьников. 90 % учащихся помнят о том, что в начальной школе учителя предлагали им задания из занимательного математика, зато абсолютно все участники анкетирования хотели бы продолжить решать занимательные задачи в средней и старшей школе. Из всех анкетированных 94 % хотели бы узнать, что такое геометрические игрушки.

Данная анкета была рассчитана на ответы «да» или «нет». Некоторые учащиеся дали расширенный ответ. Например: «Математика мне нравится, т.к.

это интересный предмет», «Математика – любимый предмет», «Занимательная математика расширяет мой кругозор», «Занимательные задачи лучше постоянно решать», «В начальной школе решались разные занимательные задачи», «Я не слышал о геометрических игрушках, хотел бы про них узнать» и прочее.

На основе проведенного анкетирования можно сделать вывод: Математика и занимательная математика интересна учащимся МБОУ «Школа №115», и в старшем и среднем звене стоит продолжать решать занимательные задачи. Никто из учеников не написал, что знают, что такое геометрические игрушки но всем хочется узнать, что это такое.

Результаты анкетирования показывают, что моя исследовательская работа «Флексагоны» будет интересна учащимся школы.

## Заключение

В процессе работы я получил много новых знаний, навыков. Я с большим интересом изучал новые для меня новые геометрические объекты – флексагоны и флексоры.

Еще я смог познакомить с ними моих одноклассников. Одноклассники заинтересовались этим удивительным объектом и попросили научить их изготавливать данные игрушки.

С одной стороны, моя работа завершена, все поставленные задачи выполнены. Я изучил историю создания флексагонов, их классификацию, создал несколько моделей. Однако с другой стороны мне предстоит еще долгое путешествие по удивительному миру изгибаемых многоугольников.

Знакомство с флексагонами позволило мне по-другому посмотреть на мир математики и внести приятное разнообразие в окружающие нас предметы быта и интерьера. Создание геометрических игрушек на основе флексагонов и флексоров способствует развитию пространственного воображения, развивает логическое мышление, позволяет заняться необычным хобби.

Работа над исследовательским проектом продолжается. Впереди меня ждет трудный, но интересный путь:

- я узнал, что такое «флексагон» и «флексор»;
- детально изучил вопрос о происхождении флексагонов;
- нашел информацию, изучил инструкции по созданию некоторых видов флексагонов;
- мною были изготовлены разнообразные модели флексагонов;
- на уроке математики познакомил одноклассников с флексагонами, многие мои одноклассники загорелись желанием делать модели флексагонов;
- выяснил где и в каких областях в жизни человека применяются флексагоны.

Анализирую свою работу могу сказать, что намеченные задачи выполнены. Цель, которую я ставил перед собой достигнута. Моя работа предназначена тем, кто любит необычную и занимательную математику. Данная работа может быть использована на занятиях математического кружка.

В окружающем нас мире очень много неоткрытых загадочных вещей, которые могут нас удивить своими замечательными свойствами.

## Список литературы

1. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. /Пер. с англ. — М.: «Мир», 1999, 447с, ил.— (Математическая мозаика)
2. Репина Г. Флексагоны как средство математического развития дошкольников. //Дошкольная педагогика. 2008. №3. С. 22-26.
3. Панов А., Флексагоны, флексоры, флексманы. «КВАНТ» — 1988 - №7  
[http://kvant.ras.ru/1988/07/fleksagony\\_fleksory\\_fleksmany.htm](http://kvant.ras.ru/1988/07/fleksagony_fleksory_fleksmany.htm)
4. ВИКИПЕДИЯ. - URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Флексагон>.
5. Энциклопедия знаний. -URL: <http://www.pandia.ru/96559/>.
6. Дженкинс Д., Биар М. Математические головоломки. - М.: Центрполиграф, 2000, С. 32.
7. Долбинин Н. Жесткость выпуклых многогранников.// Квант. 1988. №5. С. 6 - 14.
8. Залгаллер В. Непрерывно изгибаемый многогранник. // Квант. 1978. № 9. С. 13 - 19.
9. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. Учебное пособие для 5-6 классов.- М.: Мирос, 1995, С. 240.

## Приложения

### Анкета для учащихся

#### **Вопрос 1. Любите ли вы уроки математики?**

«ДА» – 85%

«НЕТ» - 15%

#### **Вопрос 2. Интересна ли вам занимательная математика?**

«ДА» - 90%

«НЕТ» - 10%

#### **Вопрос 3. В начальной школе вы занимались занимательной математикой?**

«ДА» - 90%

«НЕТ» - 8%

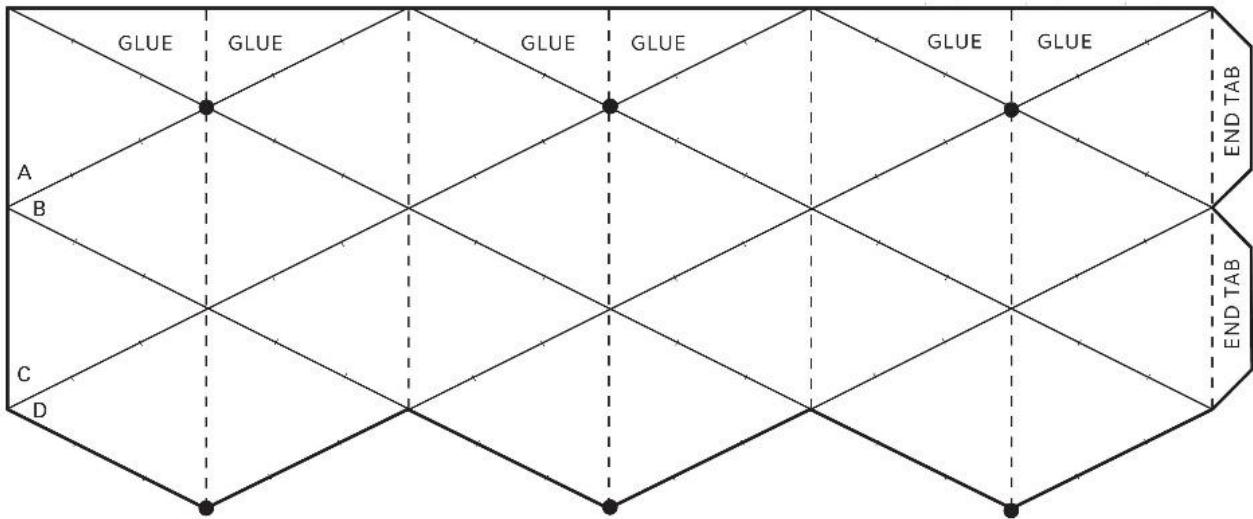
«НЕ ПОМНЮ» - 2%

#### **Вопрос 4. Хотели бы вы узнать о геометрических игрушках?**

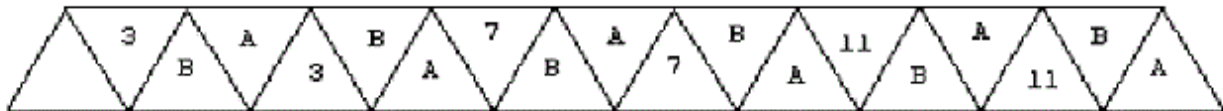
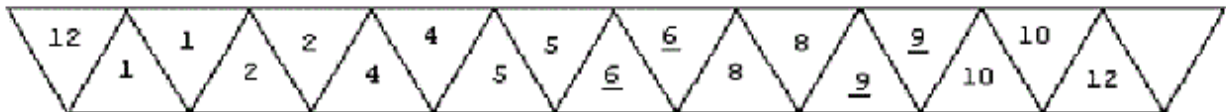
«ДА» - 94%

«НЕТ» - 6%

# Заготовки флексагонов



Top Side



Bottom Side