



МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
ГОРОДСКОЙ ОКРУГ «ГОРОД НИЖНИЙ НОВГОРОД»
МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
«ШКОЛА № 74 С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ»

Геометрические паркетты

Работу выполнила
ученица 8в класса
Ждан Ярослава

Научный руководитель:
Котельникова.Е.Г.

Нижний Новгород
2024 г.

Содержание

Введение	1
ГЛАВА 1 Мауриц Эшер. Геометрические паркеты Эшера	
1.1. Мауриц Эшер. Биография	2-5
1.2. Мозаики и паркеты. Определение	6-8
1.3. Применение математических паркетов в реальной жизни	9-10
1.4. Разновидности. Теория построения	11-14
1.5. Способы переноса элементов паркета	15-17
ГЛАВА 2 Создание паркетов	
2.1. Создание своего паркета	18-24
2.2. Примеры своих паркетов	24-27
Заключение	28
Список используемой литературы	29

1. Введение

На уроке геометрии мы познакомились с очень интересными картинами художника Маурица Эшера. Удивительны они были тем, что состояли из повторяющихся элементов, которые не имели наложений и просветов между собой. Эти работы меня заинтересовали, поэтому я решила познакомиться с творчеством Эшера поближе и узнать секрет создания таких прекрасных картин. Оказалось, что практически все картины Маурица либо полностью имеют такое строение, либо же имеют лишь деталь, но тем не менее картины приобретают свою «изюминку» благодаря таланту художника. Его работы не показались мне обычными гравюрами, во всех них вложен смысл, через гравюры художник разговаривал с людьми, показывал красоту городов, архитектуры, красоту людей... И все это без использования обширной цветовой палитры, лишь черный и белый цвет! Но возвращаясь к их поразительному строению встает вопрос о биографии Эшера: точно ли Мауриц является самым обычным художником или все-таки математика присутствовала в жизни творца? Ведь в этих картинах безусловна заложена определенная теория, без соблюдения которой ничего не получится. Как человек, не имеющий отношения к математике, может познать эту теорию и соблюдать ее в своих работах, меняя геометрические фигуры на другие элементы, как животные и птицы?

Задача: моей задачей является изучить работы Эшера и понять теорию построения его паркетов

Цель: создать свои собственные паркеты.

1.1 Эшер. Биография

Мауриц Корнелис Эшер родился 17 июня 1898г. в городе Лееварден, административном центре нидерландской провинции Фрисландия, отец был инженером, а мать дочкой министра. Как правило свое призвание творческие люди находят в юности, Мауриц не был исключением. Единственное, что он считал интересным и увлекательным было рисование. К математике мальчик не тянулся! Учитель, который первым заметил стремление воспитанника познать мир искусства, показал ему некоторые элементы ксилографии (гравировки по дереву). С этого и началась непростая, но фантастическая, дорога творчества Маурица Эшера. Первым произведением художника стал портрет Джорджа Арнольда Эшера, любимого и почитаемого сыном отца. Что примечательно, гравировка была выполнена на необычном «полотне» — фиолетовом линолеуме.



Аттестат зрелости он не получил, но художественное образование очень хотел получить, поэтому в течении нескольких лет брал уроки в Техническом училище Делфта. После он поступает в Харлемскую школу культуры и декоративных искусств, откуда выпускается уже дипломированным специалистом.

В 1922 году переехал в Италию, где очень продуктивно занимался изобразительным искусством – рисовал пейзажи многих итальянских городов.

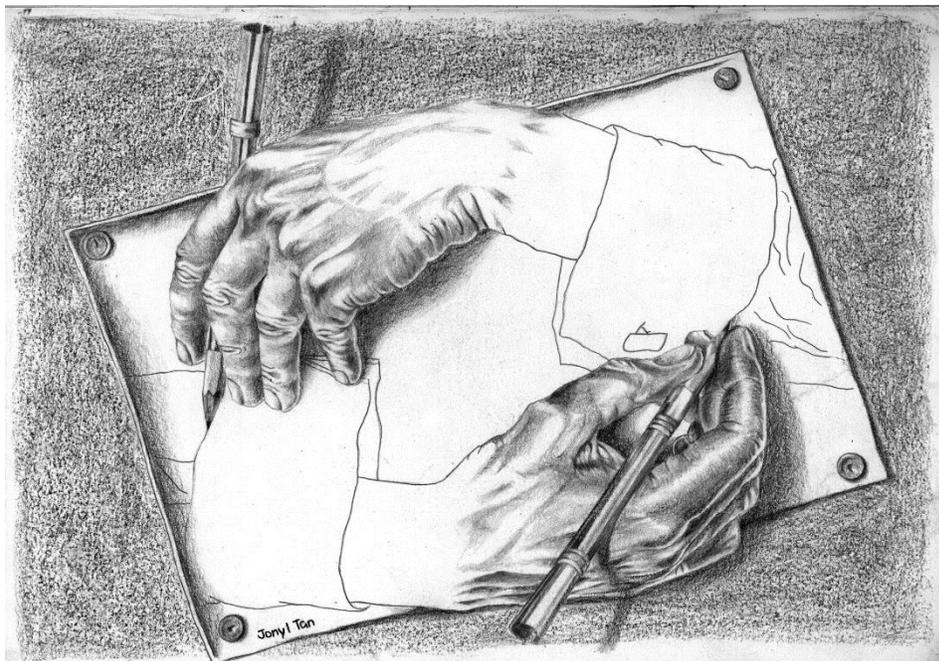


Художник прославился своими орнаментальными гравюрами и работами с удивительной архитектурой («Рисующие руки», «Рептилии», «Дом с лестницами»).

Особенной популярностью пользуются «мозаичные» работы художника, в создании которых определяющую роль сыграла математика. Многие его произведения построены на регулярном и нерегулярном повторении на плоскости геометрических фигур, что напоминает принцип трёхмерной мозаики.

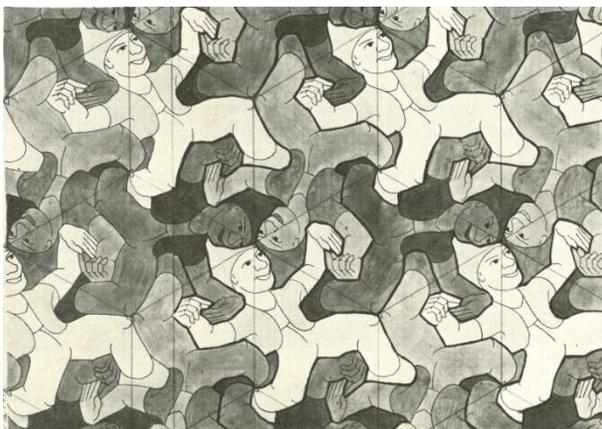
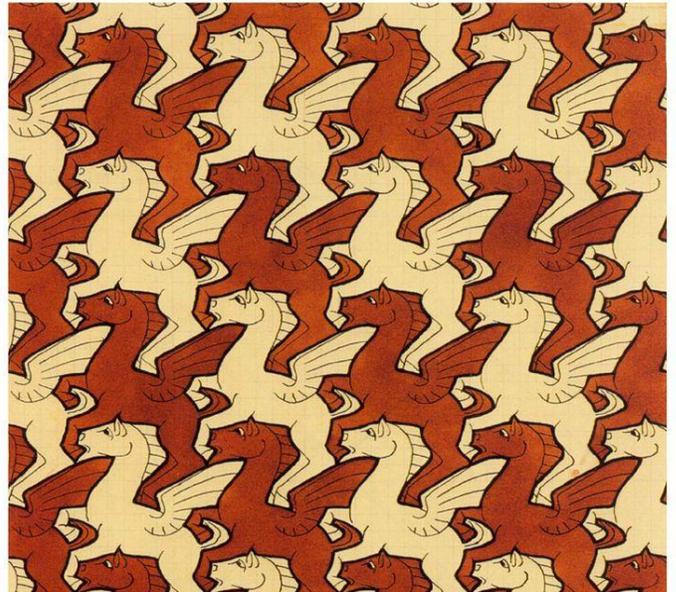
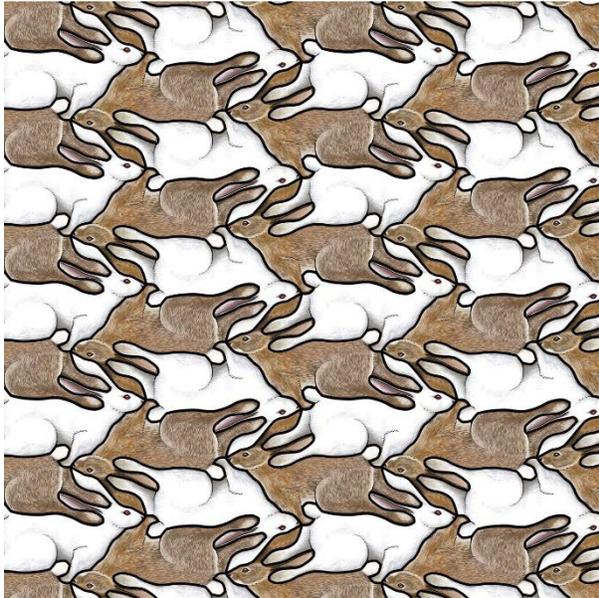
Самыми главными для него являются многогранники. Они присутствуют во многих работах мастера.

Гравюры:





Мозаики:



1.2 Мозаики и паркет. Определение

При упоминании паркета первыми на ум приходят дощечки для лицевого покрытия пола, а при упоминании мозаик – мозаичное искусство IX века, которое активно развивалось в Византии. Но паркет и мозаики, которые заинтересовали меня, имеют мало общего со строительными материалами или же с техникой декорирования, однако имеют общие черты с искусством, а именно с тесселяцией (греч. tessere, «четырёхугольник»). Тесселяция – разбиение поверхности на повторяющийся узор геометрических фигур, данный прием был известен мастерам многих древних культур: арабской, китайской, индийской.



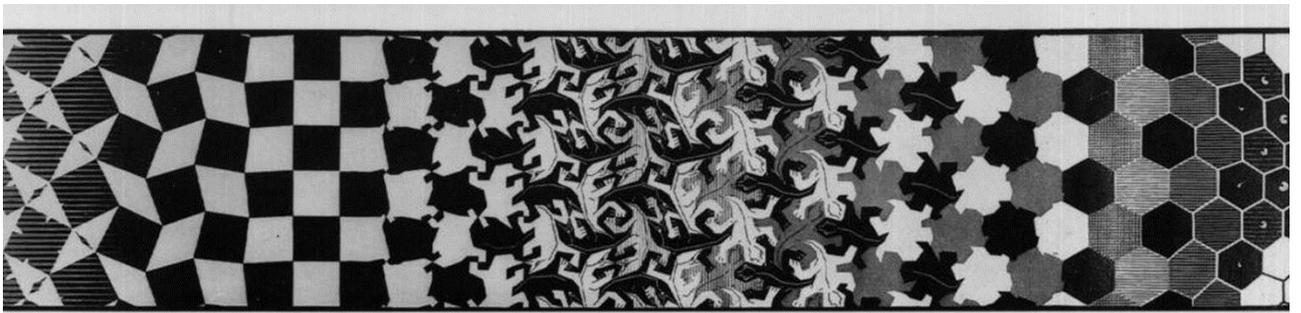
Сегодня тесселяция используется для создания детализированной компьютерной графики



Математики же такие структуры по замощению поверхностей без промежутков называют геометрическими паркетами.

Также можно встретиться с понятием «паркет Эшера», так как большинство работ Маурица имеют такое строение. Паркетом Эшера на плоскости называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину и не имеют между собой просветов и наложений

Художник интересовался мозаиками разных видов: замкнутыми и незамкнутыми. Но стоит отметить, что он создал и свой собственный вид мозаик, который принято называть «Метаморфозом». Как и в любой другой науке метаморфоз это преобразование чего-либо, так и в работах Эшера мы можем наблюдать переход от неодушевленных предметов в другие неодушевленные, переход от одушевленных в других одушевленных, а также Эшер мог превращать предметы в живых существ.



1.3 Применение математических паркетов в реальной жизни

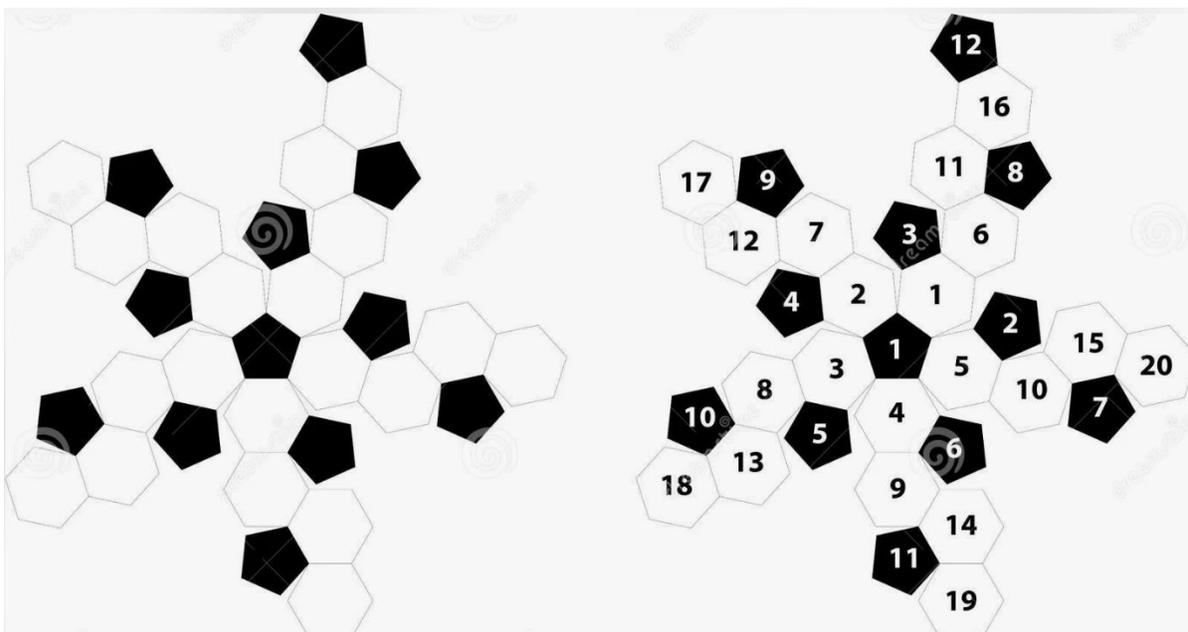
Разбиение плоскости на равные фрагменты присутствует не только в картинах Эшера, его можно встретить и в реальной жизни, причем довольно часто.

Иногда паркетом являются самые обычные бытовые вещи, о которых мы даже не задумываемся, к примеру школьники почти каждый день встречаются с паркетом в своих тетрадях в клеточку, в которых элементом паркета является квадрат. Также в домах часто можно встретить лоскутные одеяла, выполненные в технике пэчворк. Пэчворк - это техника шитья вещей из лоскутков ткани. Кусочки сначала соединяют в небольшие блоки в виде разных геометрических фигур.



В последнее время использование мотивов различных паркетов в одежде, аксессуарах, дизайне жилища, строительстве зданий является последним «писком» моды.

И важно отметить, что паркет может существовать не только на плоскости, тому может быть доказательством обычный футбольный мяч. Паркет расположен на поверхности сферы и состоит из 12 пятиугольников и 20 шестиугольников.



1.4 Разновидности. Теория построения

Самым простым способом для замощения плоскости многоугольниками без просветов является правильный паркет. Правильный паркет состоит из правильных многоугольников, т.е из таких выпуклых многоугольников у которых равны все стороны и все углы. Для создания такого паркета подходят: равносторонний треугольник, квадрат, равносторонний шестиугольник. Вокруг одной точки плоскости можно плотно уложить 3 правильных шестиугольника, 4 квадрата, 6 правильных треугольников. В каждом из этих замощений любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину.

Доказательство, что правильный паркет можно построить только из трёх правильных фигур:

Как известно: сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна

$$(n-2) * 180$$

где n - число вершин многоугольника. Тогда величина каждого угла правильного многоугольника равна

$$a = ((n-2) * 180) : n$$

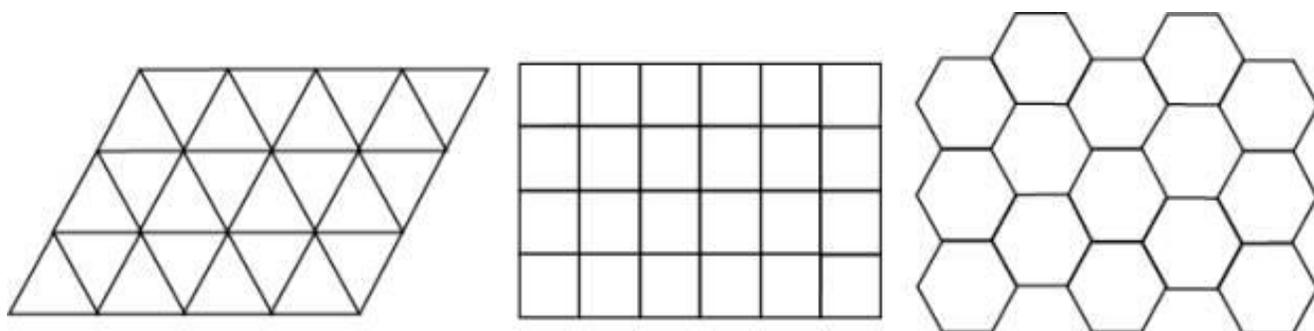
Кол-во углов n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Величина угла a	60	90	108	120	128,57	135	140	144	147,27	150

А теперь составим таблицу, где a - величина угла правильного многоугольника, а k - число углов, сходящихся в одной точке (вершине) паркета. Сумма углов правильных n -угольников, сходящихся в одной точке паркета равна 360, значит $k=360 : a$

a	60	90	108	120	128,57	135	140	144	144,27	150
k	6	4	3,3	3	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4

То есть у правильного треугольника $a = 60$, соответственно $k=60$, т.е. в одной вершине правильного паркета могут сходиться 6 правильных треугольников, но если рассматривать такую фигуру, как 8-ми угольник, то $a=135$, $k=2,7$, т.е. из 8-ми угольника нельзя составить правильный паркет, ведь в одной точке может сходиться только 2,7 8-ми угольников

Примеры правильного паркета (всего существует 3 вида)



Чтобы увеличить количество возможных паркетов, нужно расширить требования: мы оставляем требование к правильности многоугольников, но добавляем условие о том, что теперь это могут быть выпуклые многоугольники с разным числом сторон. Таким образом мы получаем полуправильный паркет

Полуправильный паркет – паркет, состоящий из правильных многоугольников (допускается разное число сторон), которые расположены одинаково вокруг каждой вершины. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$

Учитывая, что сумма всех углов должна быть равна 360° составим таблицу

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 360^\circ$
60°	60°	60°	60°	120°		Паркет из 3ов и 6ов (рис 14)
60°	60°	60°	90°	90°		Два паркета из 3в и 4в (рис 15,16)
60°	60°	90°	150°			Нет паркета
60°	60°	120°	120°			Паркет из 3в и 6в (рис 17)
60°	90°	90°	120°			Паркет из 3в, 4в и 6в (рис 18)
60°	150°	150°	90°			Паркет из 3в и 12в (рис 19)
90°	90°	90°				Правильный паркет из квадратов (рис 5)
90°	120°	150°				Паркет из 4в, 6в и 12в (рис 20)
90°	135°	135°				Паркет из 4в и 8в (рис 21)
120°	120°	120°				Правильный паркет из 6ов (рис 6)

Можно сделать вывод, что полуправильных паркетов существует всего 8
ТИПОВ

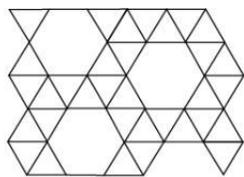


Рис. 14

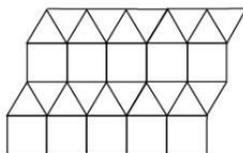


Рис. 15

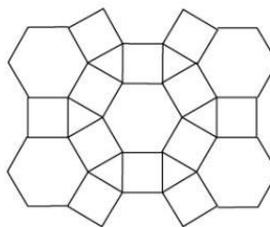


Рис. 18

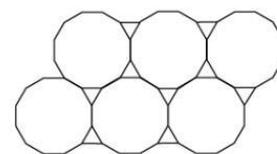


Рис. 19

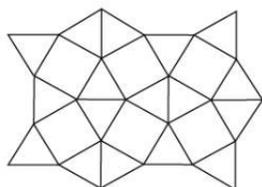


Рис. 16

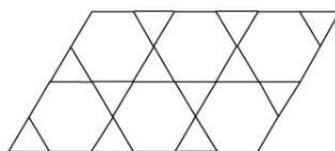


Рис. 17

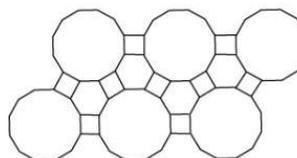


Рис. 20

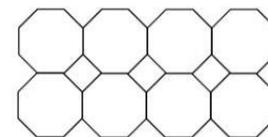
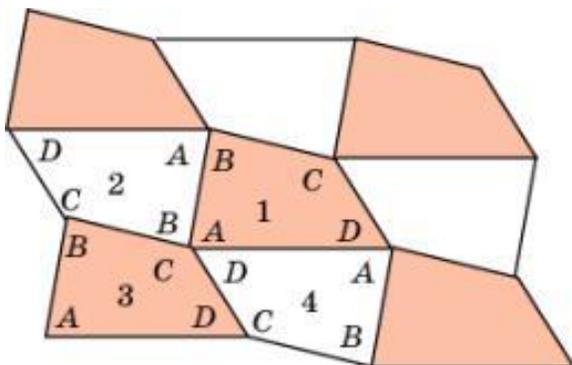


Рис. 21

Паркеты из произвольных неправильных многоугольников или рисунков животных, птиц, людей и т.д. называют неправильными.

Стоит проверить утверждение о том, что из любых неправильных, равных исходному четырехугольников можно составить паркет.

Возьмем произвольный четырехугольник ABCD, обозначим его цифрой 1. Далее рассмотрим точку, которая является серединой стороны AB, тогда четырехугольник №1 перейдет в четырехугольник №2 при центральной симметрии, относительно данной точки. Аналогично получаем четырехугольник №3 и №4. Таким образом в одной точке сходятся углы A, B, C и D, но все они являются углами одного и того же выпуклого четырехугольника, следовательно, их сумма равна 360° . Получается, что для любого произвольного четырехугольника можно создать паркет

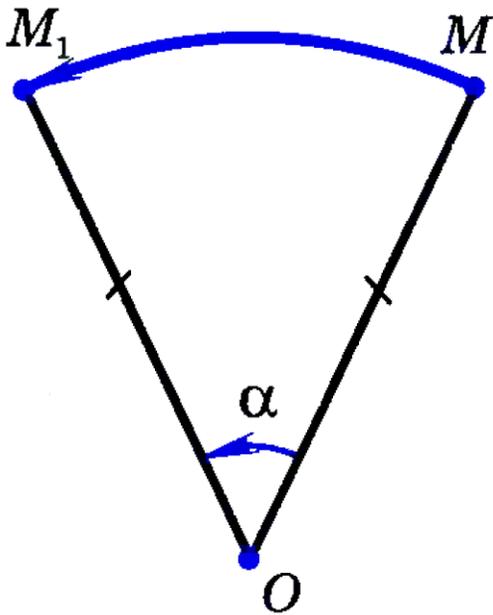


1.5 Способы переноса элементов паркета

Существует несколько способов перенести элемент паркета: поворот, центральная симметрия, параллельный перенос. Изучим каждый из них

Поворот:

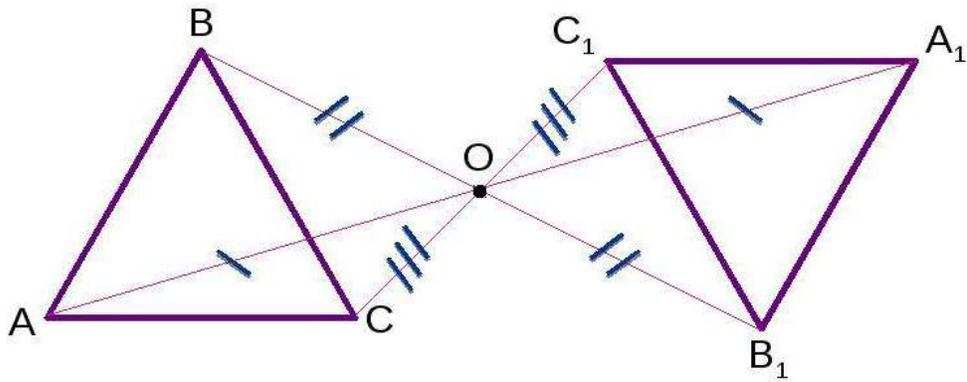
Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1 , что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α



Центральная симметрия – симметрия относительно точки

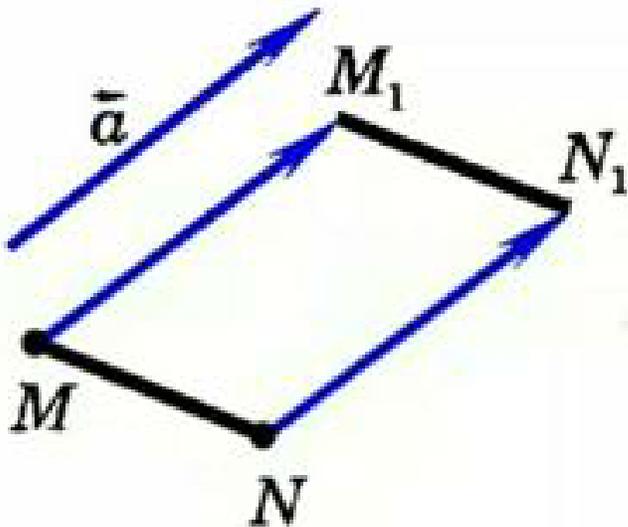
Центр симметрии

Точки A и A_1 симметричны относительно некоторой точки O , если точка O является серединой отрезка AA_1 . Точка O называется центром симметрии.

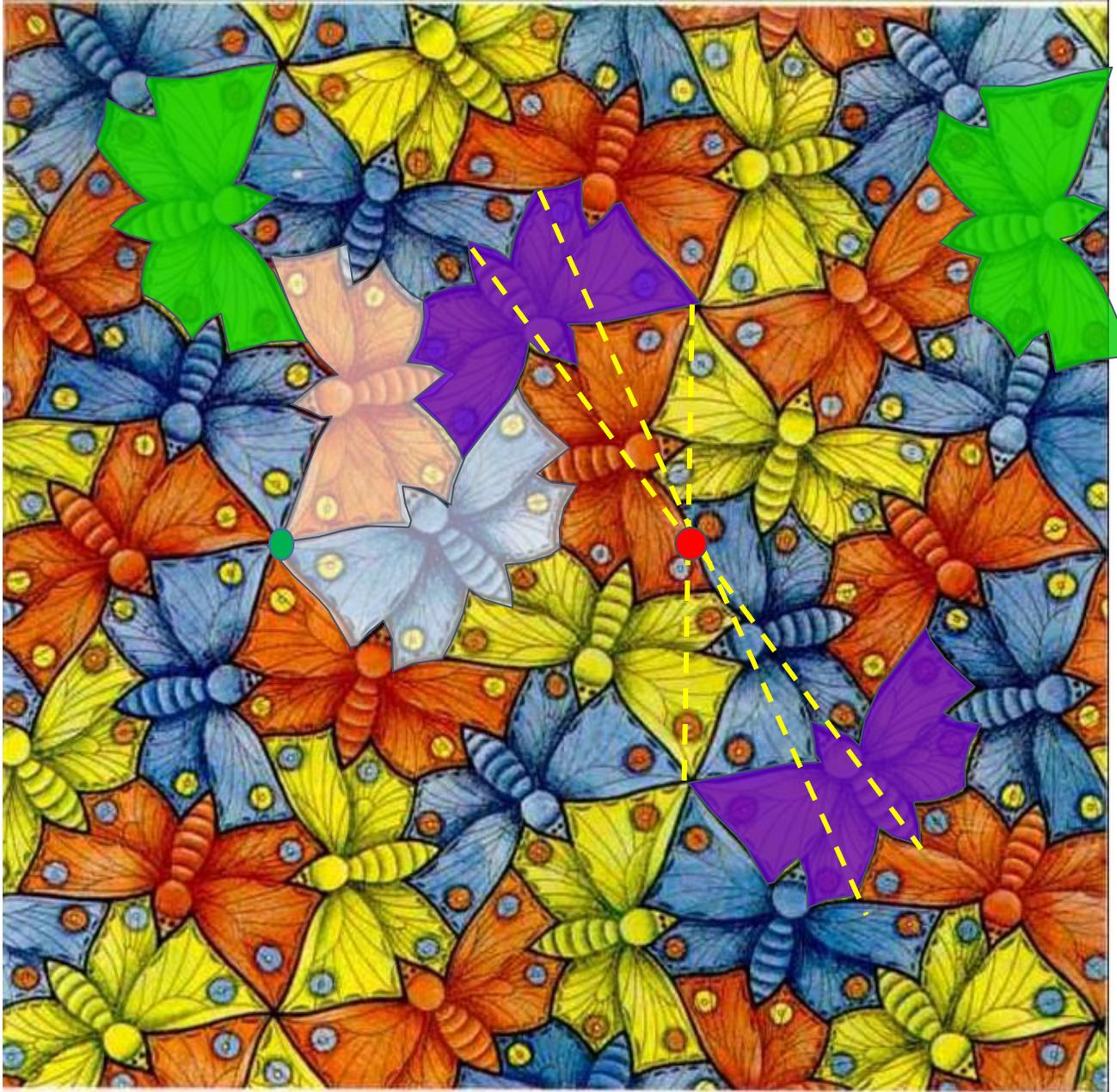


Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор $\vec{\alpha}$ называется отображение плоскости, при котором каждая точка M отображает такую точку M_1 , что вектор $\vec{MM_1}$ равен вектору $\vec{\alpha}$



Все эти способы переноса элемента паркета можно встретить в паркетах Эшера. Но, чтобы рассмотреть их, не обязательно искать несколько работ художника, достаточно одной:

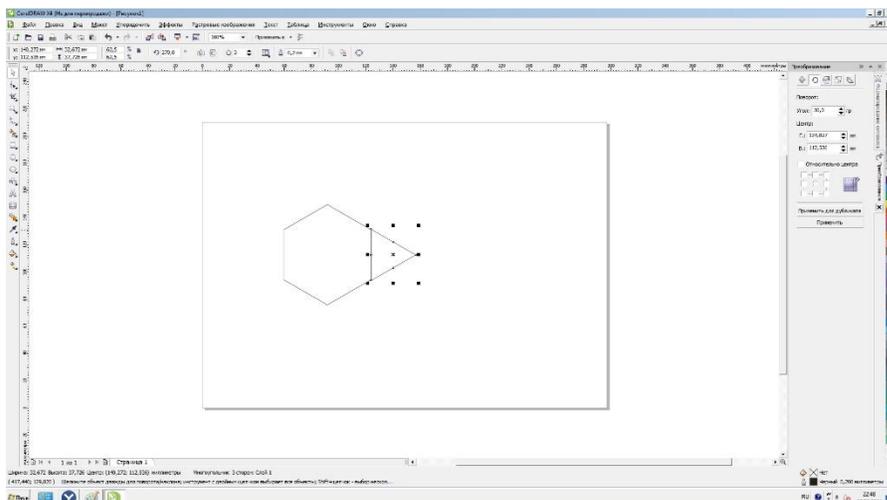


2.1 Создание своего паркета

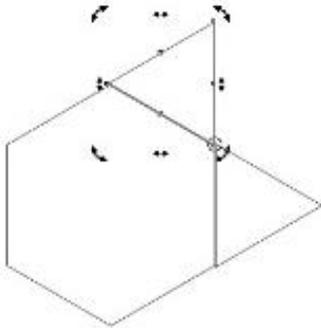
После просмотра и изучения работ Эшера мне захотелось создать свой собственный паркет. Я решила, что интереснее всего будет создать неправильный паркет. Но для начала я изучила создание полуправильных паркетов. Это оказалось не так уж и трудно, ведь зная теорию практика дается намного проще. Для создания своего паркета я использовала такие фигуры, как правильный треугольник и шестиугольник. Для их создания я использовала программу CorelDRAW.

Углы равностороннего треугольника равны 60° , а углы правильного шестиугольника 120° . Я решила, что в одном элементе паркета будут 2 треугольника и 1 шестиугольник, оставляя место для 2 шестиугольника, ведь сумма двух углов треугольника и одного угла шестиугольника равна $60+60+120=240$. Чтобы получить 360° в одной точке не хватает 1 угла шестиугольника. Расчеты оказались верны, значит я могу создавать паркет

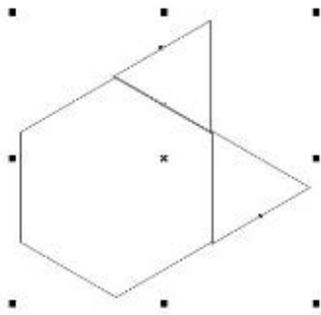
Как я уже сказала, для создания своего паркета я использую правильный треугольник и шестиугольник, так чтобы стороны треугольника были равны сторонам шестиугольника:



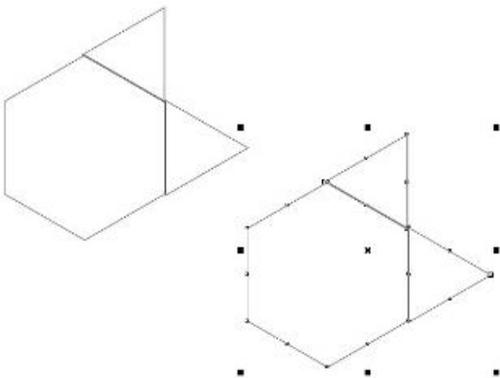
Далее с помощью поворота создаю треугольник, который также прилегает к стороне шестиугольника



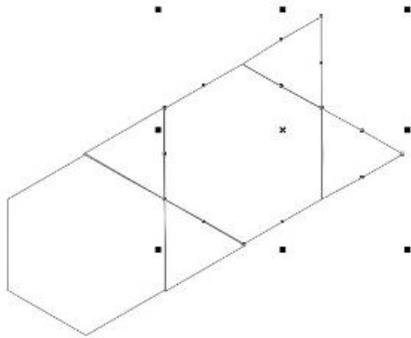
Я сделала элемент из которого будет состоять весь паркет, поэтому я соединяю три фигуры в одну целую.



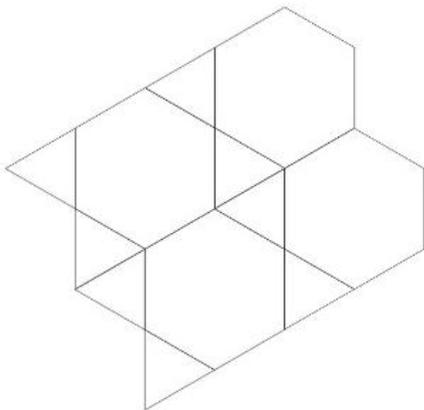
Копирую элемент



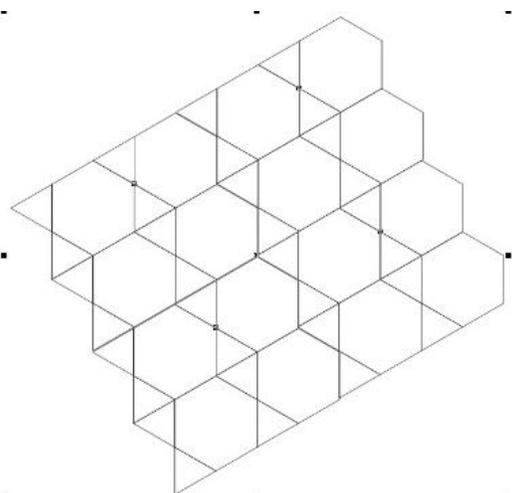
Соединяю элементы угол к углу, чтобы не было просветов между ними, таким образом в одной точке в сумме 360° , значит я могу соединять данный элемент в один и создавать паркет из него



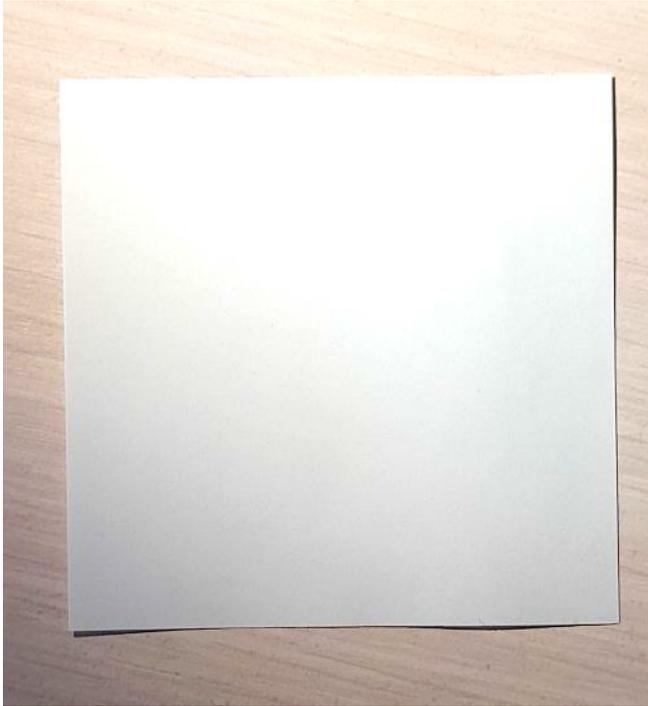
Соединяю новые элементы по стороне, чтобы не было просветов



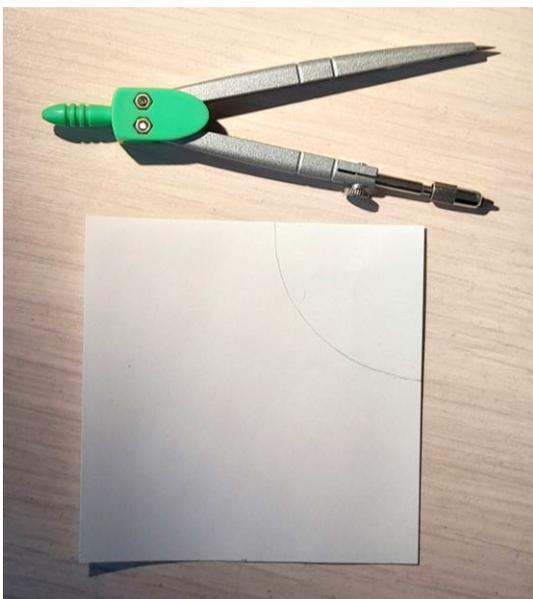
Повторяю данную комбинацию и получаю паркет



Также я решила попробовать создать паркет своими руками, с помощью бумаги, ножниц и клея. За основу я решила взять рыбу. Ее я создала из квадратного листа бумаги



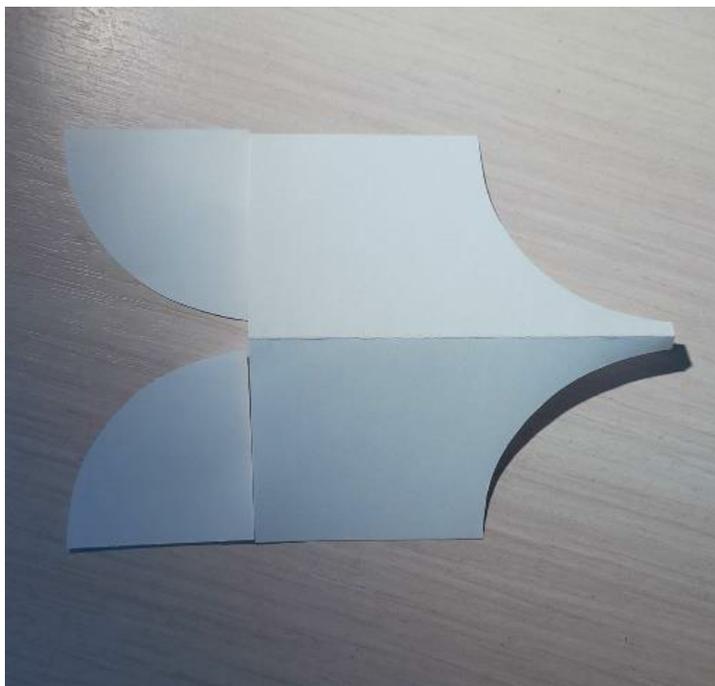
Далее с помощью циркуля провела сектор, который будет формировать мордочку рыбы.



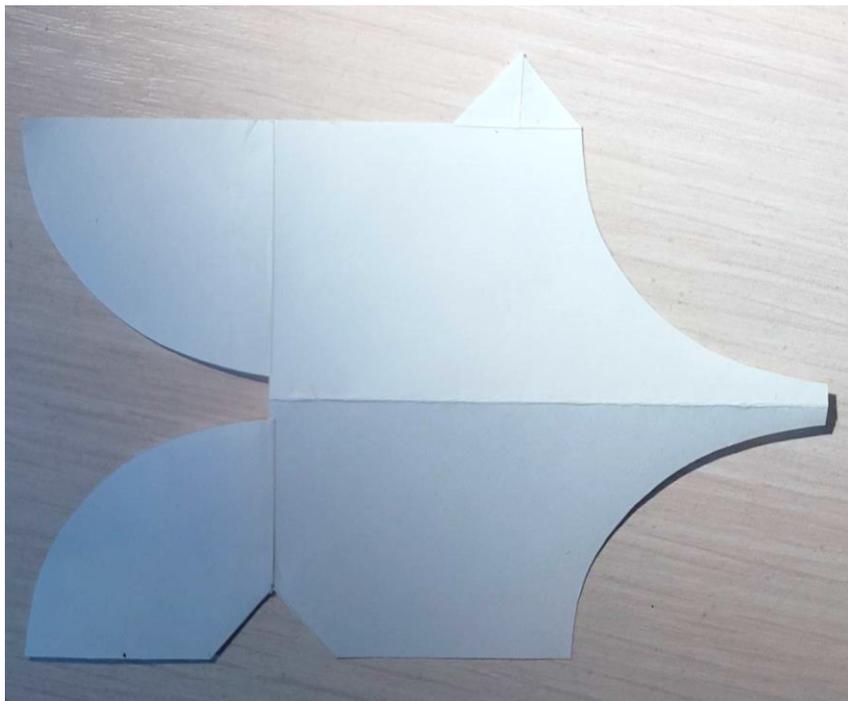
Согнув бумагу пополам, отрезала бумагу по нарисованной линии



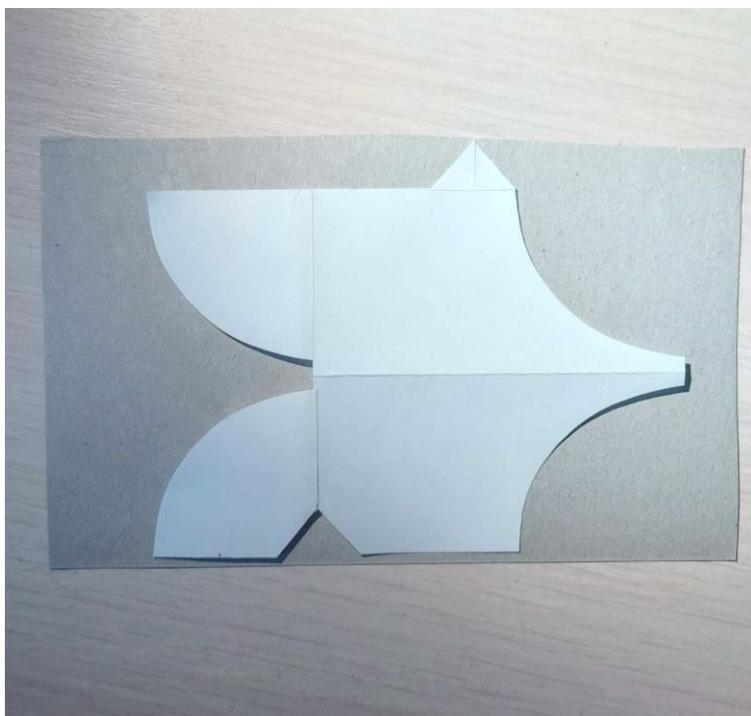
Отрезанные детали приклеила к другой стороне рыбы, формируя хвост.



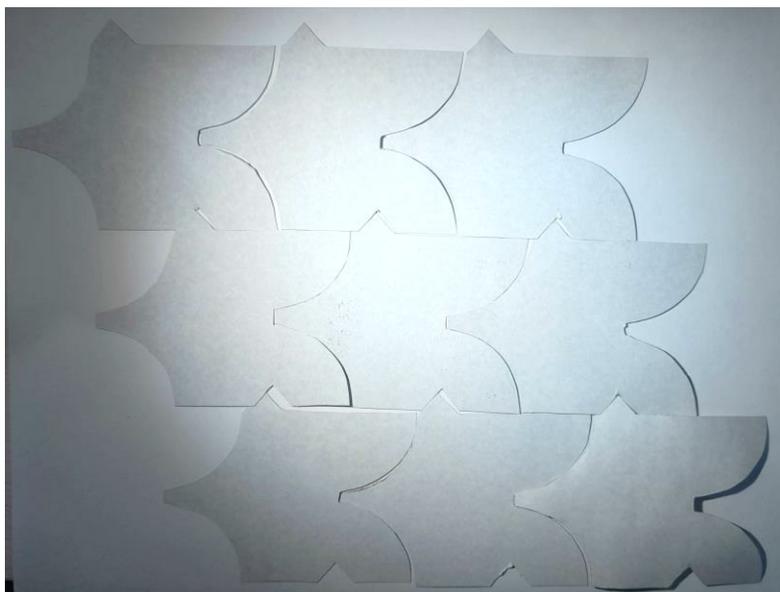
На месте стыковки приклеенных деталей и самого тела вырезала треугольник, который приклеила к верхушке рыбы, как гребешок



Приклеила рыбку на картон и вырезала ее, тем самым создав шаблон для создания других рыб.



Вырезала 9 одинаковых рыб и переложила на лист А3, чтобы проверить верно ли они сходятся между собой



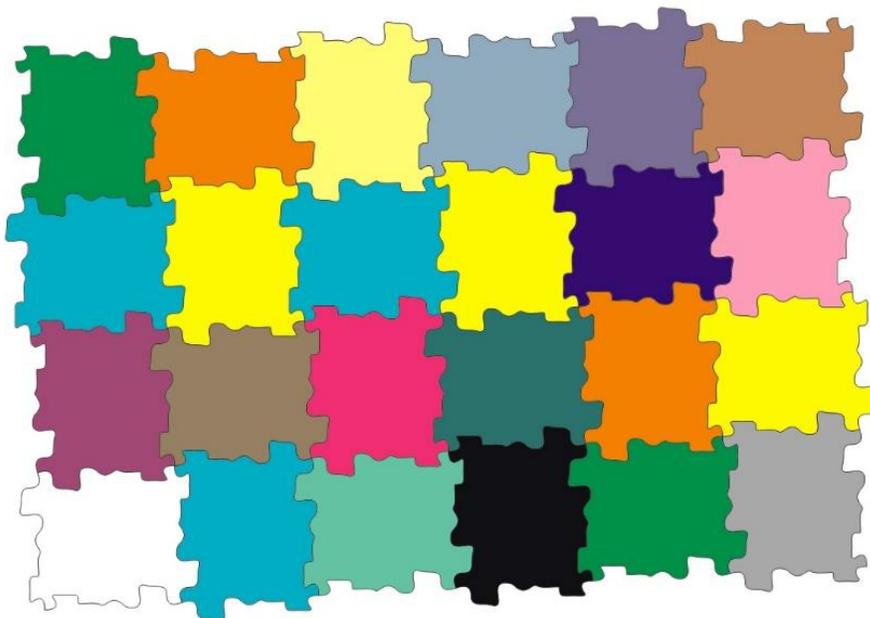
Раскрасила рыбок



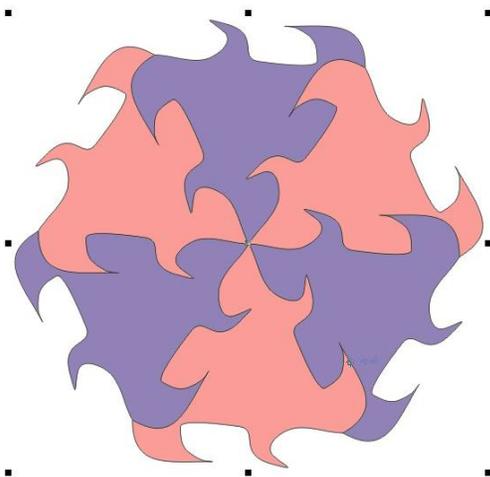
2.2 Примеры своих паркетов

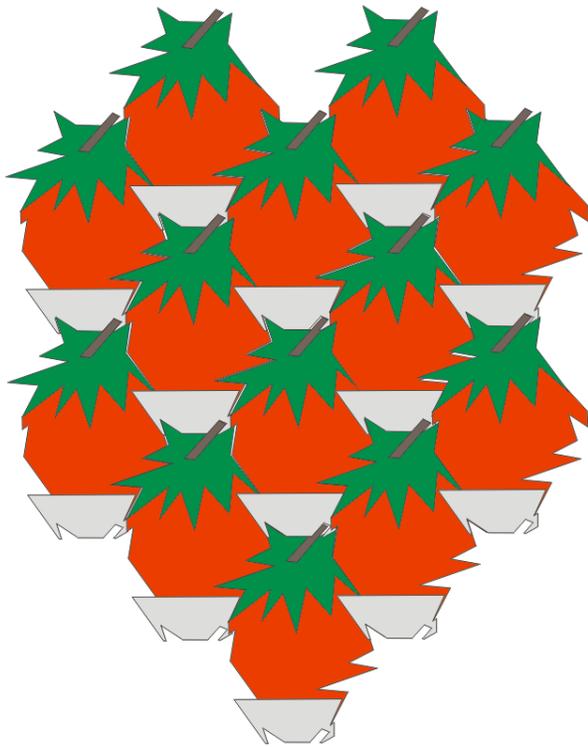
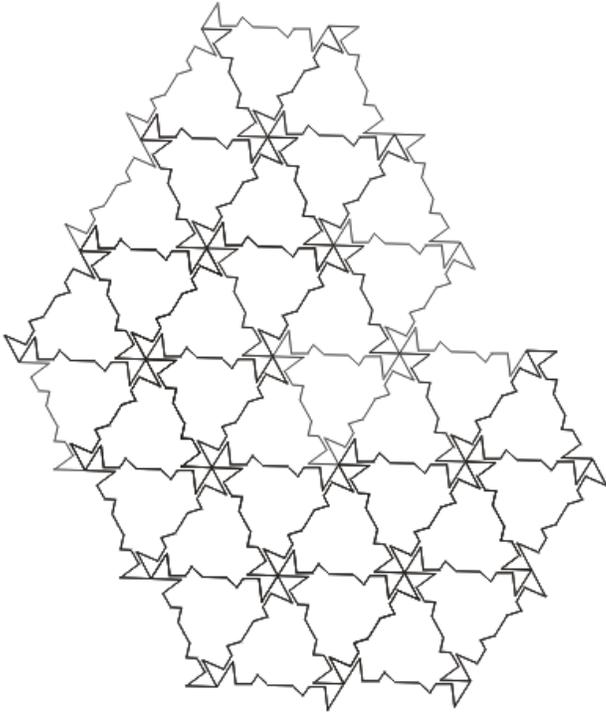
Я решила, что после удачного построение полуправильного паркета и бумажного паркета, я смогу сделать еще несколько неправильных паркетов

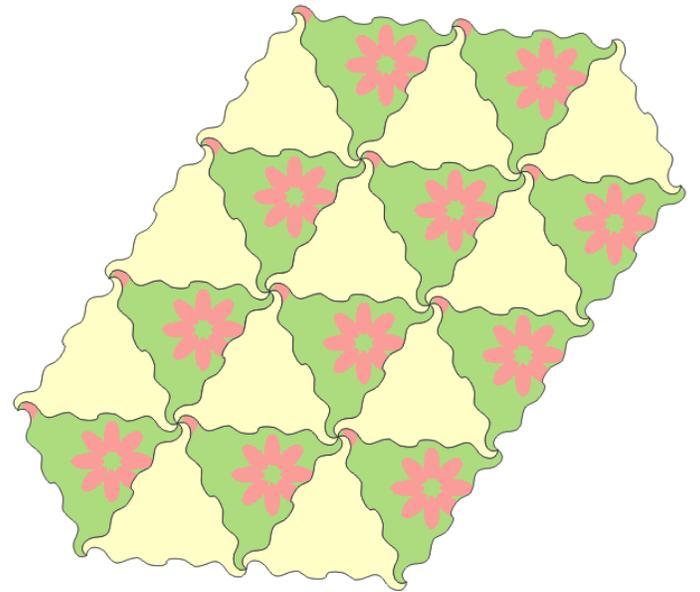
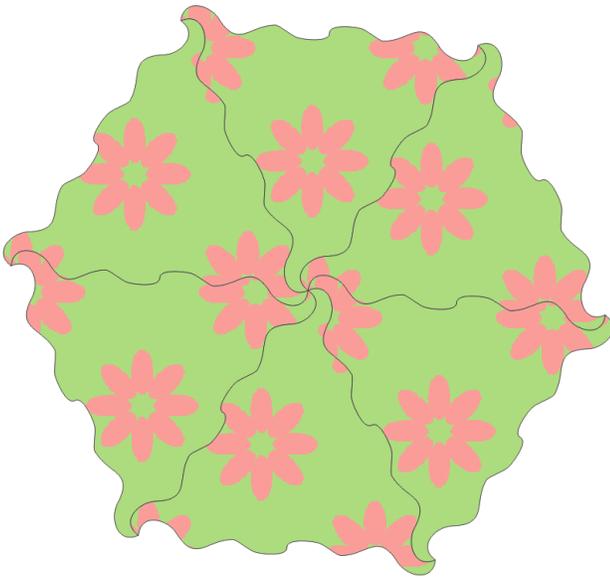
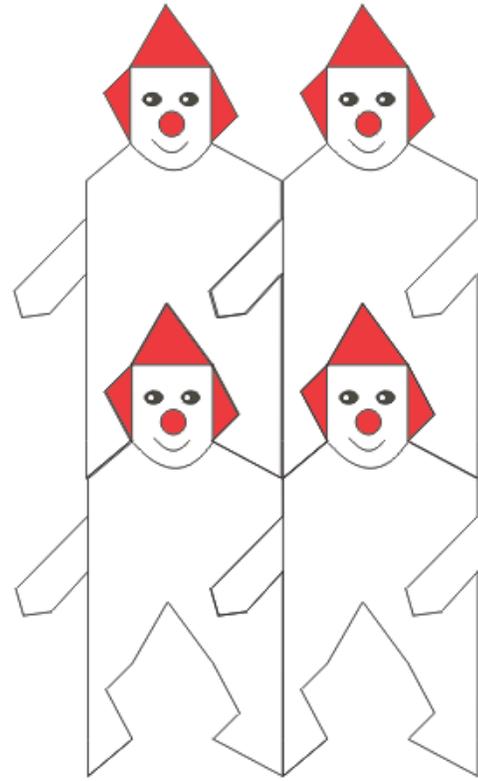
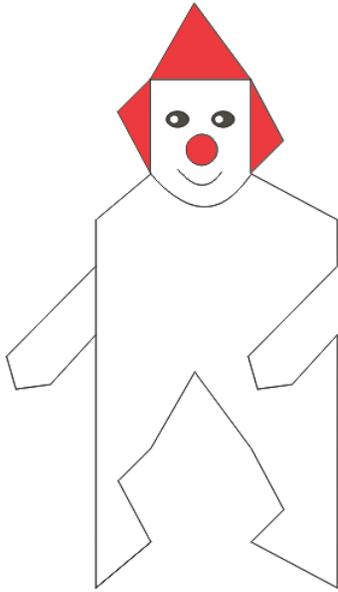
За основу я взяла фигуру, созданную из кривых линий. Данные линии я продублировала с поворотом на 90° . Получилась фигура, напоминающая квадрат. Далее саму фигуру я дублирую с поворотом в 90° , получая паркет. С помощью заливки я даю паркету цвет.



Мне очень понравилось создавать паркет, поэтому я решила создать еще несколько паркетов







Заключение

В результате своего исследования я расширила свой кругозор, теперь я имею базовые знания о построении паркетов Эшера, а также научилась строить их самостоятельно, хоть они и не сравнятся с шедеврами самого художника. Безусловно математическая теория паркетов имеет свое практическое применение: к примеру теперь я знаю, как минимум один подарок для своих друзей – пазл. Ведь пазл это тоже некий паркет и является достойным подарком своим приятелям и знакомым, а пазл, сделанный своими руками, точно доставит много положительных эмоций. Но помимо подарков теория полезна и людям, работающим в разных сферах: дизайнерам, ремесленникам, строителям... Но и не стоит забывать о самых обычных людях, не удивительно, но теория о строении паркетов поможет и в ремонте! Чаще всего при ремонта люди хотят сделать не только практично, но и красиво, индивидуально. В этом им помогут многоугольники, знания об их свойствах и способах их укладки. Теперь, если я захочу связать свою жизнь с одной из выше перечисленных сфер, то я уже получила первоначальные знания, что сделает мой путь намного проще, а если мне придется принимать дизайнерское решение в своем доме, то у меня будут примеры возможных вариантов оформления пола, стен или потолка!

Данная работа подарила не только знания о теории построения математического паркета и его создани, но и уйму положительных эмоций

Поставленные цели и задачи выполнены

Список используемых источников и литературы

1. <https://infourok.ru/proektnaya-rabota-po-vneurochnoy-deyatelnosti-parket-eshera-principi-postroeniya-2475798.html?ysclid=lu5xuqm7k1274150362>
2. https://licei1.ucoz.ru/24-10-2012/prezentacija_magija_m-ehshera.pdf
3. https://old.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/poly_poln_0.pdf
4. <https://infourok.ru/povorot-i-parallelniy-perenos-geometriya-klass-3835747.html?ysclid=lu5xzj5341662305348>
5. <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%88%D0%B5%D1%80,%D0%9C%D0%B0%D1%83%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%81>
6. <https://artchive.ru/escher>
7. <https://skysmart.ru/articles/mathematic/osevaya-i-centralnaya-simmetriya?ysclid=lupn3xqosy379627038>
8. <https://2kartinki.ru/kartinki/%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9-%D1%80%D0%B8%D0%BC-%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B-%D0%B8-%D1%83%D0%B7%D0%BE%D1%80%D1%8B>
9. <https://foxford.ru/wiki/matematika/tsentralnaya-simmetriya?ysclid=lupn5tjtre385827308>
10. <https://dzen.ru/a/WbwAbUjIXmStbyop>
11. <https://impossible.info/russian/articles/escher/escher.html?ysclid=lupn6xk2fw130430346>