Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Школа №21»

Бином Ньютона

Работу выполнил:
Таланов Артем, 8 «Б» класс
Научный руководитель:
Шимоненко В.Д

Нижний Новгород
2024

Содержание. **стр**

Введение.

Задачи исследования:

1. Изучить применение бинома Ньютона.
2. Исследовать способы применения бинома Ньютона в решении различных задач.
3. Изучить связь бинома Ньютона с другими математическими концепциями.

Актуальность:

Бином Ньютона играет важную роль в математике и широко применяется в различных областях, таких как физика, экономика, информатика и другие. Понимание и изучение данного метода позволяет решать сложные задачи и улучшает математическую подготовку.

Цель исследования:

1. Изучить основные принципы и свойства бинома Ньютона.
2. Рассмотреть примеры применения бинома Ньютона в решении различных задач.
3. Исследовать возможности использования бинома Ньютона для упрощения математических вычислений.

Проблема:

Многие школьники сталкиваются с трудностями при изучении бинома Ньютона и его применении в практике. Недостаточное понимание основных свойств бинома Ньютона может привести к ошибкам в решении задач.

Гипотеза:

Гипотезой исследования может быть утверждение о том, что глубокое понимание бинома Ньютона и его применение сможет значительно облегчить решение различных математических задач и улучшить результаты школьников.

Глава 1. Бином Ньютона и треугольник Паскаля

1.1. Треугольник Паскаля и число сочетаний

Запишем в каждой клетке таблицы число способов дойти до нее из левой нижней клетки, двигаясь только вправо или вверх. Считаем, что мы находимся в самой левой нижней точке, поэтому в нее можно попасть единственным способом.

1				

В каждую следующую клетку последний шаг будет сделан из клетки снизу или из клетки слева, поэтому количество способов добраться до каждой следующей клетки — это сумма количества способов добраться до клетки снизу от нее и до клетки слева от нее.

1	4+1	5+10	15+20	35+35
1	3+1	4+6	10+10	15+20
1	2+1	3+3	4+6	5+10
1	1+1	2+1	3+1	4+1
1	1	1	1	1

В результате получим такую таблицу. Эту таблицу можно бесконечно продолжать вверх и вправо.

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Рассмотрим диагонали этой таблицы и пронумеруем их, начиная с 0. Пронумеруем также клетки в каждой диагонали, начиная с 0, снизу вверх.

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Утверждение.

Пусть (n, k) — это клетка с номером k на диагонали с номером n. Тогда число в клетке (n, k) равно C.

Доказательство.

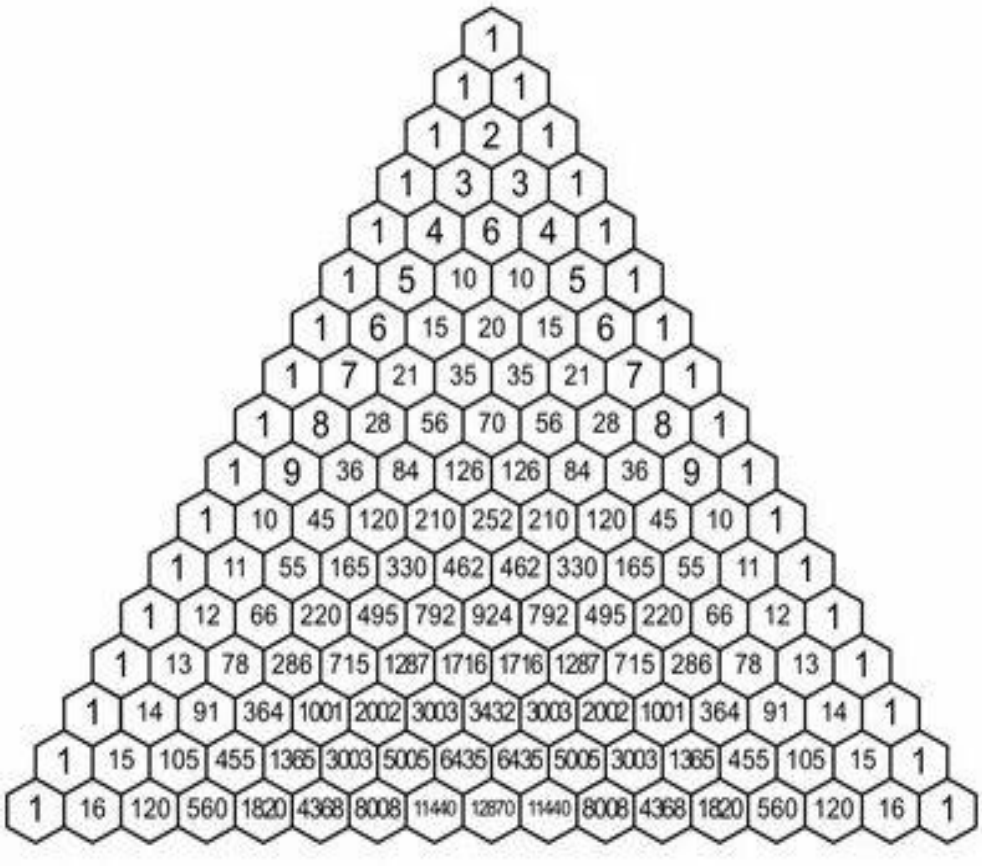
Заметим, что попасть из левой нижней клетки (0, 0) в клетку n-й диагонали, можно, сделав ровно n ходов (двигаясь только вправо или вверх). Причем, чтобы попасть в клетку (n, k), нужно сделать n-k ходов вправо (на диагональ с номером n-k) и k ходов вверх (на диагональ с номером п и клетку с номером k). Количество способов — это сделать равно количеству способов выбрать k предметов из n различных предметов. Действительно, каждый способ добраться из левой нижней клетки (0, 0) в клетку (n, k) — это некоторый вариант выбора, какие k ходов из n будут ходами вверх (тогда остальные n-k ходов будут вправо).

Таким образом, так как в каждой клетке таблицы стоит количество способов добраться до нее из левой нижней клетки, то в клетке (n, k) стоит число C

Доказано.

Повернем таблицу так, как показано на рисунке внизу. Получился числовой треугольник, который называется треугольником Паскаля. На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух стоящих над ним.

Строки треугольника нумеруются сверху вниз (это диагонали таблицы), начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нули.



1.2. Бином Ньютона и число сочетаний

Из алгебры известны формулы квадрата и куба суммы двух переменных:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Бином Ньютона — это формула, которая помогает возвести сумму двух чисел в любую степень, имеющая вид:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^0 b^n$$

Из-за этой формулы числа C_n^k называют **биномиальными коэффициентами.**

Глава 2. Доказательство и свойства бинома Ньютона.

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) * \ldots * (a+b)$$
$$- \text{произведение } n \text{ многочленов в скобках.}$$

Чтобы найти произведение n многочленов, нужно взять из каждого многочлена по одному слагаемому, перемножить все n слагаемых и полученные произведения сложить. Таким образом, разложение выражения $(a+b)^n$ на отдельные слагаемые будет включать все возможные слагаемые вида $a^k b^{n-k}$ для k от 0 (когда из всех скобок взяты только слагаемые b) до n (когда из всех скобок взяты только слагаемые a).

Для получения слагаемого $a^k b^{n-k}$ нужно из k скобок выбрать слагаемое a, а из остальных n-k скобок выбрать слагаемое b. Сделать это можно C_n^k способами (выбрать k скобок из n, из которых мы возьмем слагаемое a, тогда слагаемые b можно выбрать из остальных n-k скобок единственным способом). Поэтому в разложении будет C_n^k слагаемых $a^k b^{n-k}$. После приведения подобных слагаемых получим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^0 b^n$$

Доказано.

Свойства бинома Ньютона

1. Число слагаемых на 1 больше степени бинома.
2. Коэффициенты можно найти по треугольнику Паскаля.
3. Коэффициенты симметричны.
4. Если в скобках знак минус, то в разложении знаки + и — чередуются,
5. Сумма степеней каждого слагаемого равна степени бинома,
6. Сумма коэффициентов разложения равна $(a+b)^n$ равна 2^n.

Глава 3. Применение бинома Ньютона в математике.

3.1. Нахождение биноминального коэффициента

Найдем биноминальные коэффициенты для выражения $(a+b)^5$.

Из треугольника Паскаля: $C_5^5 = 1$; $C_5^4 = 5$; $C_5^3 = 10$; $C_5^2 = 10$; $C_5^1 = 5$; $C_5^0 = 1$

Из вышесказанного: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

3.2. Задачи

а) Докажите, что сумма коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n

Рассмотрим выражение $(1+1)^n$. Если сложить 1+1, то $(1+1)^n = 2^n$

С другой стороны, по биному Ньютона, $(1+1)^n = C_n^0 1^0 1^n + C_n^1 1^1 1^{n-1} + C_n^2 1^2 1^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} 1^{n-1} 1^1 + C_n^n 1^n 1^0 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$

Из вышесказанного получаем, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

■

б) Найдите наибольший коэффициент в выражении $(1+2x)^5$

Заметим, что второй член выражения равен переменной х с коэффициентом 2, поэтому биномиальный коэффициент будет умножен на 2^{n-k} в каждом члене выражения. Посмотрев на 5 строчку треугольника Паскаля, мы увидим, что 3 и 2 числа самые большие. Поэтому наибольший биноминальный коэффициент будет равен C_5^3 = 10 и C_5^2 = 10. Коэффициент при х увеличивается до конца выражения. Наибольший коэффициент при х будет равен 2^5 = 32, однако биноминальный коэффициент будет равен C_5^0 = 1. Заметим, что чем меньше k, тем больше коэффициент при х, поэтому умножаем 2^{n-k} на наибольший биноминальный коэффициент, в котором наименьшее k.

В итоге получаем $C_5^2 \times 2^{5-2} = 10 \times 8 = 80$.

Проверим, разложив выражение $(1+2x)^5$.

$$(1+2x)^5 = C_5^5 1^5 + C_5^4 1^4 2^1 x^1 + C_5^3 1^3 2^2 x^2 + C_5^2 1^2 2^3 x^3 + C_5^1 1^1 2^4 x^4 + C_5^0 2^5 x^5 = 1 \times 1 + 5 \times 1 \times 2 \times x + 10 \times 1 \times 4 \times x^2 + 10 \times 1 \times 8 \times x^3 + 5 \times 1 \times 16 \times x^4 + 1 \times 1 \times 32 \times x^5 = 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$$

Ответ: 80

в) Какие коэффициенты будут при ab^{13} и $a^{11}b^3$ **после раскрытия скобок в выражении** $(a+b)^{14}$**?**

Чтобы найти коэффициенты при этих членах, посмотрим на степень первого члена выражения. В первом случае (ab^{13}) степень равна 1, а значит k = 1. Во втором случае ($a^{11}b^3$) степень равна 11, а значит k = 11. Подставляем эти числа в биномиальный коэффициент.

Из треугольника Паскаля: $C_{14}^1 = 14$ $C_{14}^{11} = 364$

Ответ: 14; 364

г) Раскройте скобки в выражении $(x-y)^5$

Из треугольника Паскаля: $C_5^5 = 1$; $C_5^4 = 5$; $C_5^3 = 10$; $C_5^2 = 10$; $C_5^1 = 5$; $C_5^0 = 1$

Как мы видим, это выражение отличается от остальных тем, что нам представлена разность, а не сумма. Чтобы правильно раскрыть скобки с разностью, мы поочередно вставляем минус и плюс между членами.

Из вышесказанного: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Ответ: $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Заключение.

Таким образом, изучение бинома Ньютона является важным элементом математики, так как он позволяет упростить расчеты и решение сложных задач. Знание данного метода позволит школьникам успешно решать задачи в различных областях науки и повышать свой уровень математической грамотности. Формулы бинома Ньютона могут быть применены не только в алгебре, но и физике, химии и экономике. Изучение данного математического инструмента открывает перед школьниками широкие перспективы для применения их знаний в практических задачах.